Titre: Title:	L'effet des conditions aux frontières dans la résolution du problème inverse en élastographie
Auteur: Author:	Claudia Chevrefils
Date:	1998
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Chevrefils, C. (1998). L'effet des conditions aux frontières dans la résolution du problème inverse en élastographie [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/6882/

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/6882/
Directeurs de recherche: Advisors:	
Programme: Program:	Unspecified

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

L'effet des conditions aux frontières dans la résolution du problème inverse en élastographie

Claudia Chevrefils
INSTITUT DE GÉNIE BIOMÉDICAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE BIOMÉDICAL)
mars 1998

0-612-38664-3

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

L'effet des conditions aux frontières dans la résolution du problème inverse en élastographie

Présenté par: Claudia Chevrefils

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès science appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

SAVARD Pierre, Ph.D., président

BERTRAND Michel, Ph.D., membre et directeur de recherche

BUSCHMANN Michael, Ph.D., membre

Remerciements

J'aimerais d'abord remercier mon directeur de recherche, M. Bertrand, pour m'avoir fait confiance lors du développement du projet et pour m'avoir permis de travailler avec les chercheurs connus de l'élastographie.

Je tiens également à remercier Hervé Gagnon avec qui j'ai pu discuter de longues heures sur la résolution du problème inverse ainsi que sur les techniques d'optimisation.

Je remercie également Lahbib Soualmi pour les discussions que nous avons eues sur les éléments finis.

J'aimerais aussi remercier tous les autres étudiants, plus particulièrement Roch Maurice, Stéphan Dupont, Hervé Gagnon, Dany Bérubé, Christine Trépanier et Geneviève Hamel avec qui j'ai partagé mes hauts et mes bas tout au long de ma maîtrise.

Je tiens enfin à remercier Johanne Raymond pour son aide à la révision de la version préliminaire de ce mémoire.

Résumé

La clé de la guérison du cancer du sein réside dans la détection précoce. Toutefois, les méthodes de détection actuelles, notamment la mammographie et l'examen par palpation, comportent plusieurs inconvénients. En effet, la mammographie, en plus d'être une méthode très dispendieuse, requiert l'exposition de la patiente à des radiations. Son utilisation constitue aussi un sujet très controversé pour les femmes de moins de 50 ans chez qui les cas de seins denses sont très fréquents. L'examen par palpation peut pour sa part, être effectué par le médecin ou par la femme elle-même. Cette méthode est très subjective et laisse place à une grande marge d'erreur. D'ailleurs, son efficacité dans la détection de tumeurs situées loin de la surface de la peau est très faible. Bref, les méthodes de détection présentement utilisées sont donc des techniques qui présentent des marges d'erreurs relativement élevées et de grands inconvénients pour les femmes.

L'élastographie est une technique de détection présentement à l'étude qui pourrait s'avérer efficace comme outil d'appoint pour diagnostiquer les cancers qui sont parfois difficiles à déceler avec la mammographie. Cette méthode en développement permet de détecter des tumeurs dans les tissus mammaires à l'aide d'ultrasons, de traitements de signaux et de modélisation par éléments finis. L'élastographie permet aussi de créer des images qui décrivent les propriétés élastiques d'un tissu soumis à une compression. Étant donné que les pathologies sont généralement associées à des changements de rigidité du tissu, un simple examen visuel de ces images permet de détecter la présence de tumeurs.

Afin de construire un élastogramme, une région du tissu est balayée par les ultrasons, avant et après la compression du tissu. Après l'acquisition des données, des traitements de signaux permettent d'étirer les signaux RF postcompression afin d'être en mesure d'utiliser la méthode de corrélation croisée entre les signaux pré et postcompression.

Cette technique permet d'estimer les déplacements de chaque point interne du tissu. Finalement, l'élastogramme, qui représente une image de déformation, peut être tracé en calculant le gradient du déplacement.

Grâce à l'hypothèse du champ de contrainte constante, l'image de déformation peut être interprétée comme une mesure relative de rigidité. Ainsi, avec l'image de déformation, il est possible de détecter des nodules mous ou durs puisque, pour une compression donnée, les nodules durs sont associés à des zones de déformations faibles, alors que les nodules mous sont caractérisés par des zones de grandes déformations.

Toutefois, cette modalité d'imagerie possède des artefacts qui peuvent nuire à l'interprétation des images. Par exemple, expérimentalement, l'hypothèse de contrainte constante n'est pas pleinement satisfaite et résulte en un effet de durcissement de structure sur l'élastogramme. Ce type d'artefact peut nuire à la détection de nodules situés dans la zone où l'arrière-plan apparaît plus dur qu'il ne l'est en réalité. L'élastographie possède aussi des limitations majeures quant à sa capacité à détecter des inclusions molles.

Afin de contourner certains des problèmes rencontrés dans l'étude d'élastogrammes conventionnels, il est possible de construire une image de rigidité du matériau à l'aide de la résolution du problème inverse. Ce processus consiste à déterminer la rigidité d'une structure simplement à partir d'une connaissance des forces appliquées sur la structure et des déplacements internes résultant de ces forces.

La résolution du problème inverse, effectuée à l'aide de la méthode de perturbation, nécessite l'utilisation d'un modèle mécanique afin d'être en mesure de simuler le comportement du tissu soumis à une compression. La méthode de perturbation consiste à minimiser, au sens des moindres carrés, l'erreur entre le champ de déplacement prédit par le modèle et celui mesuré à l'aide d'ultrasons. Une méthode d'optimisation permet de résoudre itérativement le problème afin de déterminer le module d'Young le plus susceptible d'être responsable du champ de déplacement observé.

Le processus itératif dont il est question requiert l'utilisation des éléments finis ainsi que la connaissance des conditions aux frontières. Idéalement, les conditions aux frontières, spécifiées dans le modèle, sont identiques à celles obtenues expérimentalement. Par contre, étant donné que les conditions expérimentales sont difficilement contrôlables à 100 %, il est impossible de connaître les conditions exactes à l'interface peau/compresseur. En raison de cette incertitude, les conditions aux frontières qui sont imposées au modèle peuvent dévier des conditions expérimentales. Le principal but de cette étude est de déterminer l'effet d'une erreur sur les conditions aux frontières lors de la résolution du problème inverse en élastographie. Les deux types d'erreur sur les conditions aux frontières qui sont étudiées sont le glissement à l'interface peau/compresseur et l'angle d'application de la force.

Afin d'atteindre le but visé, la résolution du problème inverse est faite à l'aide d'un modèle pour lequel les conditions aux frontières sont différentes des conditions expérimentales; il s'agit de la résolution hybride. Divers pourcentages d'erreurs sont appliqués au système dans le but de vérifier jusqu'à quel point ces erreurs peuvent affecter les résultats. La qualité des images de rigidité est évaluée à l'aide de la notion d'efficacité de transfert de contraste (ETC) qui permet de comparer le contraste observé sur l'élastogramme en fonction du vrai contraste.

À la lumière des résultats obtenus, la méthode d'optimisation la plus adéquate pour le type de problème étudié s'avère être la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée. Cette technique, plus robuste que les méthodes du gradient ou de Gauss-Newton, permet une convergence même dans un cas de résolution hybride.

L'incorporation d'erreur sur les conditions de glissement résulte en une courbe qui démontre qu'il est possible d'avoir jusqu'à environ 20 % d'erreur sur les conditions de glissement avant que la dégradation de l'ETC soit drastique. La marge d'erreur possible sur l'angle d'application de la force est beaucoup plus faible (environ 5 %). Les courbes d'ETC combinées aux courbes d'erreurs relatives permettent de bien percevoir l'influence des erreurs sur le contraste de l'image et de bien évaluer la fidélité de l'image par rapport à la réalité.

Une étude ultérieure, qui consisterait à vérifier le degré de déformation dans la direction latérale à l'interface peau/compresseur ainsi que la direction d'application de la force chez un groupe de femmes, pourrait permettre de déterminer la plage d'erreur possible sur les conditions aux frontières. Si cette plage d'erreur s'avérait inférieure aux valeurs seuils déterminées dans ce mémoire, il sera possible de confirmer que l'élastographie est en mesure de fournir une image de qualité qui pourrait faciliter la tâche des médecins dans l'établissement des diagnostics de cancer.

Abstract

Breast cancer can be detected with technologies such as mammography or by physical breast exam done by palpation. The detection technology is of great interest as doctors agree that the majority of deaths from breast cancer can be eliminated by early detection. The current methods used to detect breast tumors have drawbacks. Indeed, while mammograms are expensive and expose women to radiations, breast exams done by palpation are subjective and leave room for a large margin of error. Also, the physical breast exam is not effective in identifying tumors that are far from the skin surface and mammography rises a lot of controversy for women of less than 50 years old for which the problem of dense breast is common.

A new technology, called elastography, is being developed as a more accurate method for detecting tumors in breast tissues. This technique can create strain images of tissue under compression with the help of ultrasound, signal processing and finite element method. To create an elastogram, a region of the tissue is scanned with ultrasound twice, once before compressing the tissue and once after. Then, signal processing allows the companding of the postcompression data. This is done to roughly match the position of postcompression ultrasound echoes to those in the precompression signal. Correlation between pre and postcompression signals results in an estimation of the displacement of the tissue. The elastogram, that represents strain image, can then be determined by finding the gradient of the displacement. With the hypothesis of constant strain field, the strain image can be interpreted as a relative measure of rigidity. Thus, with an elastogram, it is possible to detect hard and soft inclusions since they are respectively associated with low and high deformation areas.

Elastography has some artifacts that can negatively impair the interpretation of the strain images. For example, since the hypothesis of constant strain field is not satisfied during experimentation, it results in a target hardening effect on the elastogram. This artifact

reduces the possibility of detecting hard tumors in the area where the background is overestimated. Also, it is known that elastography has major limitations in the detection of soft inclusions.

In order to avoid some of the problems related to conventional elastograms, it is possible to create a rigidity image of the tissue with the use of inverse problem resolution. This technique consists in finding the rigidity of the tissue knowing the applied force and the displacement field that result from the compression.

The resolution of the inverse problem, which is carried out with the perturbation method, needs a mechanical model in order to simulate the behavior of tissue under compression. The perturbation method consists in minimizing, in the least square sense, the error between the displacement field predicted by the model and the displacement field measured with ultrasounds. The problem is then solved iteratively with an optimization method in order to find the Young moduli that best matches the displacement field observed on the elastogram.

This iterative process involves the use of the finite element method and the knowledge of boundary conditions. Ideally, boundary conditions specified in the model are identical to those obtained experimentally. Since experimental boundary conditions cannot be fully controlled, it is impossible to know the exact boundary conditions at the skin/compressor interface. Because of those uncertainties, the boundary conditions that are assigned to the model may deviate from the real ones. The main goal of this study is to evaluate the effect of an error on boundary conditions in the resolution of the inverse problem in elastography. The two types of errors that are treated are the slip condition at the skin/compressor interface and the angle of application of the force.

Hybrid resolution is the technique that is used to evaluate errors on the boundary conditions. With this method, the resolution of the inverse problem is done with a model for which boundary conditions are voluntary different from those found experimentally. Various percentages of errors are applied to the system in order to verify how the errors can affect the images. The quality of the rigidity images are appraised with the contrast transfer efficiency (CTE) which allows to compare the observed contrast on rigidity images with the real contrast that should be seen.

The results obtained in this study show that the best optimization method for the hybrid resolution is the modified Levenberg-Marquardt method. Indeed, this method seems to be more robust than the gradient method or the Gauss-Newton method. Also, the study of errors on the boundary conditions showed that it may be possible to make up to a 20% error on the slip conditions before loosing proper CTE. The margin of error in the direction of application of the force is a lot smaller (5% approximately).

With the help of further studies that would consist in verifying the degree of deformation in the lateral direction at the interface skin/compressor on a test group, it would be possible to determine the margin of error that can possibly be present in experimental conditions. If this margin is inferior to the threshold values found in this study, it would be possible to confirm that elastography can supply quality images that may help the task of physician when establishing diagnostic.

Table des matières

Liste des figures

Liste des sigles et abréviations

$\{\alpha\}$	Vecteur des coefficients du polynôme d'approximation de déplacement en x
α	Gain
$\{\beta\}$	Vecteur des coefficients du polynôme d'approximation de déplacement en y
Φ	Fonction objective
ε	Déformation axiale d'une ligne mode A
ε_{kl}	Tenseur de déformation
ε_{xx}	Déformation normale au plan x dans la direction des x
ε_{yy}	Déformation normale au plan y dans la direction des y
ε_{yy}^{AP}	Déformation moyenne axiale des éléments de l'arrière-plan
ε_{yy}^{I}	Déformation moyenne axiale des éléments de l'inclusion
ε_{xy}	Déformation en cisaillement dans le plan xy
λ	Paramètre de régularisation
λ	Constante de Lamé
μ	Constante de Lamé
μ_{AP}	Module de cisaillement moyen des éléments de l'arrière-plan
μ_{I}	Module de cisaillement moyen des éléments de l'inclusion
ν	Coefficient de Poisson
σ_{ij}	Contrainte dans le plan i et la direction j
σ_{xx}	Contrainte normale au plan x dans la direction x
σ_{yy}	Contrainte normale au plan y dans la direction y
σ_{xy}	Contrainte de cisaillement dans le plan xy
σ_{zz}	Contrainte normale au plan z dans la direction des z
τ_{xy}	Contrainte de cisaillement dans le plan xy
Ω	Domaine d'étude

A_a	Angle de la direction d'application de la force dans des cas expérimentaux
A_m	Angle de la direction d'application de la force pour le modèle
[A]	Matrice de position des nœuds du maillage
[B]	Matrice hessienne
c	Vitesse de l'onde dans le milieu étudié
C_{ijkl}	Tenseur d'élasticité
C_o	Contraste observé
C_t	Vrai contraste
d	Distance séparant l'interface du transducteur
[D]	Matrice des dérivées des fonctions de forme pour un élément du maillage
E	Module de Young
E_{AP}	Rigidité moyenne des éléments de l'arrière-plan
E_d	Pourcentage d'erreur du les conditions d'application de la force
E_{est}	Champ de rigidité estimé
E_I	Rigidité moyenne des éléments de l'inclusion
Er	Pourcentage d'erreurs sur les conditions de glissement
ΔE	Champ d'ajustement de rigidité
F_a	Force latérale appliquée au spécimen
F_s	Force latérale pour obtenir des conditions de non-glissement pur
F_x	Force volumique dans la direction des x
F_y	Force volumique dans la direction des y
{F}	Vecteur de forces globales imposées aux nœuds du spécimen
g	Gradient de la fonction objective
{g}	Vecteur de forces par unité de longueur imposées au spécimen
{G}	Vecteur de forces ponctuelles imposées aux nœuds d'un élément
G	Module de cisaillement
[k]	Matrice de rigidité locale
[K]	Matrice de rigidité globale

$\vec{n}$	Vecteur normal
[N]	Matrice des fonctions d'essais
N_i	Fonction d'essai du nœud i
[P]	Matrice de pénalité
$[R_b^{-1}]$	Matrice de corrélation sur les déplacements
$[R_E^{-1}]$	Matrice de corrélation sur la rigidité
[S]	Matrice de sensibilité
ΔT	Espacement entre une paire de fenêtres temporelles
$\Delta t_{(i)}$	Décalage dans le temps pour la fenêtre distale après la compression
$\Delta t_{(i-1)}$	Décalage dans le temps pour la fenêtre proximale après la compression
t	Temps aller-retour de l'onde ultrasonore
{u}	Vecteur de déplacement des nœuds du maillage dans la direction des x
$u(X,Y)$	Fonction d'approximation du déplacement en x
{U}	Vecteur de déplacement des nœuds du maillage dans la direction des x et y
Uexp	Champ de déplacement expérimental
Umod	Champ de déplacement du modèle
U_t	Champ de déplacement mesuré à partir d'images échographiques
{v}	Vecteur de déplacement des nœuds du maillage dans la direction des y
$v(X,Y)$	Fonction d'approximation du déplacement en y

ETC	Efficacité de transfert de contraste
PD	Problème direct
PI	Problème inverse
RSB	Rapport signal sur bruit
RSB_e	Rapport signal sur bruit d'un élastogramme
SAD	Sum-absolute-difference
VCG	Validation croisée généralisée

Liste des annexes

1. Introduction

Le cancer du sein est une maladie très courante chez les femmes de tous les groupes d'âge. D'ailleurs, le cancer du sein, les maladies coronariennes, les accidents cérébro-vasculaires et le cancer du poumon constituent les quatre causes de décès les plus fréquents chez la femme.

Étant donné que le cancer n'est généralement pas douloureux avant d'avoir atteint un stade assez avancé, il est fréquent qu'il ne soit pas découvert de façon précoce ou qu'il soit tout simplement ignoré. Pourtant, un cancer du sein détecté à un stade primaire peut, dans la majorité des cas, être guéri. C'est principalement pour cette raison que les médecins et les chercheurs démontrent tant d'intérêt pour les méthodes de détection du cancer du sein.

De façon générale, les pathologies se manifestent par des changements dans les propriétés mécaniques de l'organe ou du tissu concerné. Le cancer du sein apparaît sous forme de tumeurs malignes dont la rigidité est généralement plus élevée que celle du tissu mammaire qui l'entoure. Ainsi, la détection de cette variation de rigidité permet de confirmer la présence ou l'absence d'une tumeur. D'ailleurs, l'examen par palpation, qui est couramment utilisé pour dépister le cancer du sein, est basé sur ce principe de détection de changement de rigidité. Il est aussi possible d'avoir recours à une méthode de détection plus formelle qui se nomme la mammographie.

La détection par palpation est une méthode très simple mais également très subjective et dont la marge d'erreur est assez élevée. De plus, les tumeurs situées loin de la surface de la peau ne sont pas détectables par la palpation. La mammographie est une technique qui, quant à elle, est beaucoup plus rigoureuse mais qui, par contre nécessite l'exposition de la patiente à des radiations en plus de fournir des résultats moins probants chez les femmes de moins de 50 ans. Notons aussi que l'étude d'un mammogramme conduit parfois à des faux positifs qui peuvent inutilement résulter en l'ablation partielle ou totale du sein.

Avec l'utilisation de la mammographie comme principal outil de dépistage, la détection des cancers du sein n'est pas à son niveau maximal et c'est sans doute pourquoi plusieurs autres méthodes de dépistage sont présentement à l'étude. L'élastographie, notamment, est une technique qui possède toutes les qualités nécessaires pour pouvoir éventuellement remplacer ou se combiner à la mammographie dans le but d'améliorer et de faciliter l'établissement des diagnostics par les médecins. L'élastographie consiste à déterminer les propriétés élastiques d'une région par le biais de l'étude du déplacement d'un tissu soumis à une compression. Grâce aux ultrasons qui permettent l'acquisition de signaux RF avant et après la compression, il est possible de déterminer les déplacements par une technique de corrélation croisée entre ces signaux. Ensuite, le calcul du taux de déplacement des points internes d'une structure en fonction de leur position permet de construire une image de déformation qui se nomme *élastogramme*.

Les images de déformation ainsi formées peuvent indiquer la présence de tumeurs molles ou dures par la détection de zones de grandes ou de faibles déformations par rapport à l'arrière-plan. Ces élastogrammes possèdent par contre des artefacts qui peuvent nuire à la lecture des images. Cependant, grâce à la résolution du problème inverse en élastographie, il est possible d'obtenir des images de rigidité pour lesquelles la majorité des problèmes rencontrés sur l'élastogramme conventionnel sont éliminés.

La résolution du problème inverse consiste à déterminer la rigidité du tissu en connaissant les forces appliquées au système et les déplacements de la structure. Ce processus se fait à l'aide d'une méthode itérative, appelée méthode de perturbation, grâce à laquelle il est possible de minimiser, au sens des moindres carrés, l'erreur entre le champ de déplacement prédit par le modèle et celui mesuré à l'aide des ultrasons. Notons que ce principe de minimisation peut se faire à l'aide de plusieurs techniques d'optimisation différentes comme, par exemple, la méthode de Gauss-Newton, celle du gradient, celle de Levenberg-Marquardt et celle de Levenberg-Marquardt modifiée.

1.1 Problématique

La résolution du problème inverse, effectuée à l'aide de la méthode de perturbation associée à la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée, nécessite l'utilisation d'un modèle afin d'être en mesure de simuler le comportement du tissu soumis à une compression. Cette méthode, qui consiste en un processus itératif, requiert l'utilisation des éléments finis ainsi que la connaissance des conditions aux frontières expérimentales. Grâce à des ajustements de rigidité sur le maillage du modèle, il est possible d'obtenir le champ de déplacement qui se rapproche le plus de celui obtenu expérimentalement pour des conditions aux frontières données. Étant donné que le champ de déplacement varie selon les conditions aux frontières imposées au système, il est important de bien connaître les conditions expérimentales afin d'appliquer les conditions identiques au modèle. Par contre, puisque les conditions expérimentales sont difficilement contrôlables, il est peu probable d'obtenir des conditions de glissement pur à l'interface peau/compresseur ou une direction d'application de la force qui soit parfaitement perpendiculaire à la surface supérieure du spécimen.

Généralement, ce sont plutôt des conditions de quasi-glissement (glissement partiel) ou des conditions de quasi-orthogonalité qui caractérisent les conditions expérimentales. L'état de quasi-glissement correspond justement à des conditions qui se situent entre le glissement pur et le non-glissement pur, alors que les conditions de quasi-orthogonalité correspondent à un cas où la direction d'application de la force de compression n'est pas parfaitement orthogonale avec la surface supérieure du spécimen. Puisque le modèle utilisé dans la résolution du problème inverse implique des conditions de glissement pur et d'orthogonalité, on comprend qu'il peut exister une erreur entre les conditions expérimentales et les conditions du modèle. Skovoroda *et al.* (1994) ont d'ailleurs soulevé la possibilité qu'une erreur sur les conditions aux frontières puisse influencer la qualité de la reconstruction.

1.2 Objectifs

L'objectif principal du projet consiste à déterminer l'effet d'une erreur sur les conditions aux frontières lors de la résolution du problème inverse en élastographie. Cette étude est effectuée dans le but d'appliquer la résolution du problème inverse à des images cliniques pour lesquelles les conditions aux frontières sont difficilement contrôlables. Les conditions de glissement à l'interface peau/compresseur ainsi que la direction d'application de la force engendrée par le compresseur sont les deux types d'erreurs aux frontières qui seront étudiées.

Afin d'atteindre cet objectif, nous devons tout d'abord déterminer la méthode d'optimisation la plus adéquate pour notre type de problème. Ainsi, les méthodes de Gauss-Newton, de Levenberg-Marquardt et de Levenberg-Marquardt modifiée constituent les trois méthodes parmi lesquelles le choix a été fait.

Aux termes de cette étude, il sera possible d'examiner l'effet d'une erreur sur les conditions de glissement et sur l'angle d'application de la force. De plus, puisque ces résultats seront étudiés pour différentes positions de l'inclusion, il sera possible d'exprimer l'effet d'une erreur sur les conditions aux frontières en fonction de la position de l'inclusion dans le milieu. Enfin, des test préliminaires de résolution du problème inverse effectués avec des maillages non adaptés permettront de s'assurer que la méthode est applicable à des cas cliniques pour lesquels la position de l'inclusion est totalement inconnue.

Afin de bien planifier l'approche utilisée pour atteindre ces buts, nous avons d'abord exposé le contexte de l'élastographie, son évolution ainsi que les principales méthodes utilisées pour former des images. Nous avons ensuite présenté une brève description du comportement mécanique du tissu mammaire ainsi qu'une revue de littérature concernant l'avancement de l'élastographie et son intérêt pour les médecins, afin de bien situer cette méthode dans un contexte clinique. Nous avons aussi effectué, une revue des facteurs limitatifs de l'élastographie ainsi qu'un résumé des problèmes majeurs de cette technique afin de justifier l'utilisation de la résolution du problème inverse. Un survol des diverses techniques de résolution du problème inverse utilisées en élastographie permet aussi de bien juger la méthode choisie. Finalement, après l'étude de quatre techniques d'optimisation nécessaires à la résolution du problème inverse, nous avons été en mesure de choisir la méthode qui nous semblait la plus robuste pour notre type de problème.

Après cette mise en situation, il a été possible d'élaborer une technique (résolution hybride) capable de déterminer l'effet des erreurs introduites dans le modèle par le biais des conditions aux frontières lors de la résolution du problème inverse. Cette méthode résout le problème de la même façon que la méthode de perturbation, à l'exception de l'application des conditions aux frontières qui diffèrent volontairement entre le modèle et la simulation expérimentale. L'incorporation d'erreurs volontaires sur les conditions aux frontières permet de vérifier quel pourcentage d'erreurs il est possible d'atteindre avant que le contraste observé sur l'image ne se dégrade.

Les courbes obtenues à l'aide de cette résolution hybride pourront éventuellement indiquer quelles corrections doivent être apportées aux images afin de compenser les erreurs des conditions aux frontières, ou encore, elles pourront même indiquer la nécessité de modifier le système afin d'être en mesure de mieux contrôler les conditions aux frontières. Bref, grâce à ces corrections, il sera possible d'obtenir des images fiables qui pourraient faciliter la tâche des médecins dans l'établissement de diagnostics.

2 REVUE DE LITTÉRATURE

2.1 Présentation du problème

Cette section présente la structure générale du sein ainsi qu'un bref résumé traitant des différentes formes de cancers qui s'y rattachent. Ensuite, une description des méthodes de détection courantes nous permettra de remarquer les lacunes associées à chacune d'elle.

2.1.1 La structure du sein

Afin de mieux comprendre les divers types de cancers du sein, il est important d'avoir une connaissance de base des structures internes qui constituent le sein. Ainsi, une brève description des composantes illustrées à la figure 2.1 est suffisante pour bien situer les principaux cancers.

Un sein est composé de 15 à 20 sections, appelées *lobes* (figure 2.1), et chacune de ces sections est elle-même composée de plusieurs *lobules*. Les lobules se terminent en une douzaine de petits *bulbes* qui sont responsables de la production du lait. Ces trois structures (lobes, lobules, bulbes) sont reliées par des tubes appelés *canaux*. L'espace entre toutes ces structures est rempli par du tissu adipeux. Il n'y a pas de muscle dans le sein mais les muscles pectoraux, qui couvrent les côtes, sont situés immédiatement en dessous du sein.

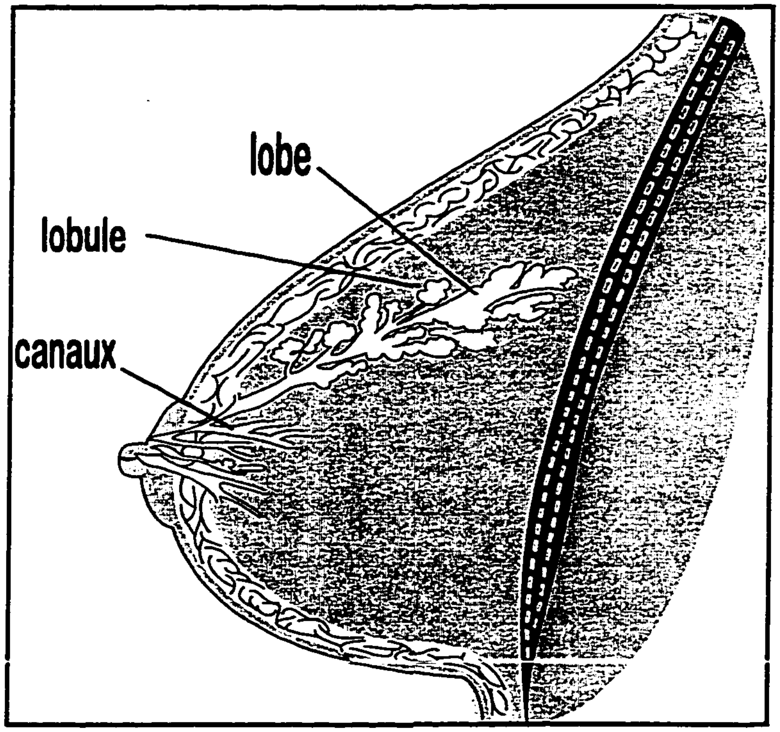


Figure 2.1 : Structure du sein.
Les principales structures qui forment le sein sont : les canaux, les lobes et les lobules.

2.1.2 Formes de cancers

Au Canada, en 1993, pour les femmes de tous les groupes d'âges, le cancer du sein constituait la quatrième cause de décès en importance après les maladies coronariennes, les accidents cérébro-vasculaires et le cancer du poumon (Société Canadienne du Cancer). En général, les cancers du sein sont des *carcinomes*, c'est-à-dire des tumeurs nées de cellules épithéliales. Puisque ces tumeurs peuvent apparaître dans les lobules ou dans les canaux, elles sont respectivement nommées *carcinomes lobulaires* et *carcinomes canalaires*.

Bien que les causes de formation de tumeurs soient encore très mal comprises, les étapes de leur formation le sont un peu mieux. Par exemple, on sait que l'inhibiteur de contact joue un rôle important dans la formation d'une tumeur. En effet, pour un sujet sain, les cellules de l'organisme se régénèrent à un rythme très rapide par division cellulaire. Les cellules mortes sont donc remplacées par de nouvelles cellules jusqu'à ce que l'inhibiteur de contact soit activé. Ce dernier informe alors les cellules qu'elles sont maintenant en contact avec du tissu sain et que la division cellulaire n'est plus nécessaire.

Le cancer commence à évoluer lorsque les cellules cessent de répondre à l'inhibiteur de contact. Ainsi, si l'inhibiteur n'a plus d'effet, il en résulte une multiplication incontrôlable de cellules qui forment une masse (tumeur) capable de perturber les fonctions normales des tissus ou des organes environnants. Les cellules de cette tumeur peuvent ensuite s'infiltrer dans le système lymphatique ou sanguin pour s'installer ailleurs dans l'organisme et ainsi former une *métastase*. Le terme métastase désigne le phénomène de l'apparition des cellules cancéreuses ailleurs qu'à leur site de création.

Le type de tumeurs malignes le plus courant est le *carcinome canalaire invasif*. Ce type de tumeur se forme dans les canaux et possèdent la propriété de se répandre dans le tissu adipeux du sein. Aux Etats-Unis, le carcinome canalaire invasif est responsable d'environ 80 % des cancers du sein (American Cancer Society)

Les tumeurs ne sont heureusement pas toutes cancéreuse. Ainsi, il existe des tumeurs dites bénignes qui sont généralement bien localisées et qui mettent rarement la vie de la patiente en danger. Ces tumeurs sont généralement plus molles que des tumeurs malignes. Les *fibroadénomes* sont un des rares exemples de tumeurs bénignes à rigidité élevée. Ces tumeurs bénignes sont constituées de tissu fibreux et glandulaire et sont généralement caractérisées par des lésions rondes et dures. Ces masses ne sont pas douloureuses et ne sont liées à aucune autre structure. Malgré leur caractère bénin, les fibroadénomes peuvent causer de graves problèmes puisqu'on peut difficilement les distinguer des tumeurs malignes. En effet, nous verrons dans la section suivante que le problème de faux positifs souvent associés aux fibroadénomes peut entraîner des biopsies et ablations inutiles.

2.1.3 Méthodes de détection courantes

Le dépistage du cancer du sein peut être fait par le biais de l'auto-examen, de l'examen clinique ou de la mammographie. Ces procédures sont recommandées afin de détecter le cancer le plus tôt possible, puisqu'il a été démontré que le taux de survie est directement lié au stade d'évolution du cancer. En effet, lorsque le cancer est détecté à un stade *in situ*[1], le taux de survie approche 100 % (American Cancer Society).

Silberberg *et al.* (1987) ont démontré que la mammographie réduit le taux de mortalité associé au cancer du sein de 30 à 35 % chez les femmes de plus de 50 ans. Même si la mammographie est la meilleure méthode de détection à ce jour, 10 à 30 % des cancers du sein ne sont pas détectés (Kocur *et al.*, 1996). Ces faux négatifs peuvent être attribués à plusieurs facteurs dont la qualité de l'image obtenue à l'aide des rayons X et/ou le problème des seins denses rencontré surtout chez les femmes de moins de 50 ans.

D'ailleurs, l'efficacité de la mammographie pour les femmes de moins de 50 ans demeure un sujet très controversé. En effet, les femmes de moins de 50 ans ont généralement des seins plus denses, et la mammographie semble être moins efficace dans ces cas (Conant *et al.*, 1996). Le problème de visibilité réduite est causé par une trop grande quantité de tissu fibroglandulaire. Ce type de tissu possède une densité très élevée et empêche la détection de tout autre structure sur un mammogramme. Conant *et al.* (1996) soutiennent que même avec un mammogramme de la plus haute qualité, 5 à 10 % des lésions ne peuvent être détectées dans un cas de sein dense. Il faut aussi noter que pour cette catégorie d'âge, le nombre de faux positifs est également une source de préoccupation puisqu'ils peuvent inutilement entraîner des biopsies et des ablations partielles ou totales du sein.

Malgré toute l'incertitude qui entoure l'utilisation de cette technologie comme moyen de détection du cancer du sein chez les femmes âgées de moins de 50 ans, 300 000 canadiennes de cette catégorie d'âge sont susceptibles de passer une mammographie en 1998 (Société Canadienne du Cancer). Il ressort clairement de ces statistiques que l'amélioration des outils de détection présentement utilisés et/ou la découverte de nouvelles techniques sont susceptibles de bénéficier à une grande partie de la population féminine. Ainsi, tant qu'il y aura place à amélioration, la recherche de meilleurs outils de détection du cancer du sein sera un sujet d'actualité.

2.2 Avancement en élastographie

L'élastographie est une méthode non invasive capable de détecter les déformations internes d'un tissu soumis à une compression. Ainsi, un aperçu du comportement mécanique du tissu mammaire soumis à une compression nous informera sur les propriétés du matériau et sur les valeurs numériques pertinentes pour les simulations.

Nous verrons aussi que la qualité des élastogrammes est dépendante des traitements de signaux utilisés dans l'évaluation du déplacement de la structure. La précision de l'estimation du champ de déplacement représente donc un facteur limitatif des performances de l'élastographie. D'autre part, nous verrons qu'il existe plusieurs techniques susceptibles d'améliorer la qualité de l'estimateur de mouvement. Cependant, en dépit des améliorations apportées aux signaux lors de la formation d'images, l'élastogramme possède des artefacts qui peuvent nuire à son interprétation.

---

[1] Le terme *in situ* signifie que la tumeur est confinée à une région immédiate au site de création.

2.2.1 L'intérêt de l'élastographie

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, les changements pathologiques sont généralement accompagnés de changements dans la rigidité des tissus. En effet, plusieurs types de cancers apparaissent sous forme de nodules durs. Mais, dans plusieurs cas, malgré la différence de rigidité, la détection par palpation n'est pas toujours efficace en raison de la petitesse du diamètre de la lésion et/ou de sa profondeur (Ophir *et al.*, 1996a). Avec l'introduction de l'élastographie, on tente d'utiliser le même principe que la palpation en étudiant la déformation interne du tissu en compression. Ces images de déformations sont obtenues à l'aide d'ultrasons mais sont bien différentes des images échographiques.

Afin de bien détecter les inclusions sur des images échographiques, les tumeurs doivent être échogènes. L'examen d'une *échographie* nous donne donc des informations sur l'échogénécité des structures étudiées. Contrairement à l'échographie, l'image de la déformation (élastogramme) ou celle du module (résolution du problème inverse) nous donne de nouvelles informations qui sont reliées aux propriétés de la structure du tissu, d'où l'intérêt de cette technique (Ophir *et al.*, 1996a).

À la lumière de ce qui précède, on comprend que la propriété intrinsèque qui nous intéresse est celle du module du tissu. Malheureusement, la mesure de ce paramètre ne peut se faire directement. Une approche possible pour reconstruire les propriétés élastiques du tissu est d'utiliser les informations de déplacements obtenues à l'aide de signaux ultrasonores suite à l'application de forces externes de compression sur le tissu. En élastographie, le mouvement du tissu est reconstruit avec un algorithme de retraçage des diffuseurs (*speckle tracking*) et de corrélation entre les images ultrasonores de pré et postcompression. Les traitements de signaux constituent donc une partie importante de la construction d'un élastogramme fait à partir de signaux ultrasonores. Étant donné qu'il existe plusieurs traitements de signaux possibles, il est important d'être en mesure d'évaluer les performances des diverses méthodes. Nous verrons dans une section subséquente que le *strain filter* nous permet justement de rassembler les informations de RSB (rapport signal sur bruit) de l'élastogramme et de la plage de déformation visible sur l'élastogramme.

2.2.2 Comportement mécanique du tissu mammaire

Étant donné que l'élastographie implique une compression du spécimen, il est important de connaître le comportement mécanique du tissu en compression afin de mieux interpréter les résultats obtenus. De plus, les renseignements contenus dans cette section nous permettront d'utiliser des valeurs adéquates pour caractériser les propriétés du tissu mou lors des simulations.

Il existe très peu de travaux sur le comportement des tissus mous en compression. Krouskop (1997) est l'un des premiers à s'être intéressé à l'évaluation de la rigidité du tissu mammaire en compression. Les résultats obtenus démontrent que la rigidité du tissu adipeux ne varie pas en fonction de la fréquence de chargement (0,1 à 4 hz) et possède une rigidité plus faible que celle du tissu glandulaire ou fibreux. Ces deux types de tissu ont quant à eux démontré une dépendance face aux différentes fréquences de chargements étudiés. Les expériences de Krouskop (1997) ont aussi démontré que les modules des différentes composantes qui forment le tissu mammaire sont étalés sur une grande plage de valeurs. Par exemple, pour une fréquence de chargement d'un hertz et une précompression de 5 %, les valeurs obtenues pour le tissu adipeux, le tissu glandulaire et le tissu fibreux sont respectivement de 19, 33 et 107 kPa.

Un autre comportement mécanique dont il faut tenir compte est la compressibilité d'un matériau. En effet, un matériau en compression peut se déformer dans la direction axiale et latérale. Le *coefficient de Poisson* (ν) représente le rapport de la déformation latérale sur la déformation axiale. Ce rapport est limité à des valeurs situées entre 0 et 0,5. Un matériau est dit incompressible si $\nu=0,5$ et compressible si $\nu=0$. Un tissu complètement *incompressible* obéit à la loi de conservation de volume; ainsi, pour une compression axiale donnée, il y aura expansion dans la direction latérale de façon à ce que le volume soit conservé. Afin de simplifier les calculs, il est possible de supposer que le matériau étudié est relativement incompressible et que le coefficient de Poisson se situe entre 0,45 et 0,49 (Fung, 1993). Notons par contre qu'en réalité, les tissus mous sont généralement viscoélastiques et compressibles. Ainsi, la théorie biphasique, qui modélise la présence d'une matrice solide et d'un liquide interstitiel (chaque phase étant en elle-même incompressible), pourrait représenter une autre façon de modéliser le comportement mécanique du tissu en compression (Ateshian *et al.*, 1997).

Des études ont aussi été faites afin de déterminer le comportement des lésions cancéreuses face à une compression (Watmough *et al.*, 1993). Les carcinomes situés dans le tissu mammaire sont généralement entourés de tissu néovascularisé lié au tissu sain (Nishimura *et al.*, 1992). Ces vaisseaux qui représentent la frontière entre les cellules cancéreuses et la circulation sont connus pour être particulièrement fragiles (Liotta, 1992). Un déchirement de ces vaisseaux ou de la lésion elle-même peut entraîner une invasion de cellules malignes dans la circulation et possiblement conduire à la formation de métastases.

Des expériences effectuées avec des fantômes (Watmough *et al.*, 1993) ont démontré que, pour des cas où l'inclusion est plus rigide que l'arrière-plan, il y a effectivement rupture à l'interface lésion/tissu pour une déformation d'environ 30 %. Notons que ce seuil n'est valable que pour le type de fantôme utilisé et ne détermine pas le seuil retrouvé dans un cas de tissu mammaire réel. Krouskop (1997) a aussi noté un comportement mécanique semblable qui confirmerait la fracture de la structure cancérigène.

Il est maintenant clair qu'une compression trop sévère peut entraîner un étirement des vaisseaux au-delà de leur limite élastique. Ce phénomène se traduit généralement par une fracture qui a comme conséquence inévitable une augmentation du risque de déchargement de cellules malignes dans la circulation. Il faut donc être sensibilisé au fait que la force de compression utilisée dans les méthodes de détection de cancer du sein peut en quelque sorte contribuer au développement du cancer et qu'il existe certainement une force optimale à appliquer afin d'obtenir toutes les informations nécessaires sans pour autant créer une rupture du tissu.

Chen *et al.* (1996) ont aussi démontré que la relation contrainte/déformation de tissu mou débute par une forme linéaire et se termine par une forme exponentielle. En effet, pour une déformation de tissu supérieure à 10 %, la relation contrainte/déformation est caractérisée par une zone non linéaire où on retrouve un effet de durcissement de la structure. Il est donc possible d'atteindre une zone de déformation où la *limite élastique* est dépassée. Cette zone correspond à un comportement plastique où il est impossible de retrouver la forme initiale du spécimen lorsque la force est retirée. Ceci signifie donc que de l'énergie a été dissipée en détruisant des liens de la structure. Cette situation représente justement le cas d'une compression trop élevée étudié par Watmough *et al.* (1993).

2.2.3 Les facteurs limitatifs de l'élastographie

La qualité du champ de déplacement est un des principaux facteurs limitatifs de l'élastographie. En effet, la visibilité d'une inclusion dans un élastogramme est limitée par le bruit (Céspedes *et al.*, 1993) qui est lui-même déterminé par la covariance du déplacement (Chaturvedi *et al.*, 1997). Les caractéristiques générales du système d'imagerie ainsi que les paramètres de l'estimation de mouvement, comme la fréquence du transducteur et la grandeur de la fenêtre de corrélation, sont des causes possibles du bruit retrouvé dans le champ de déplacement provenant de la décorrélation entre les signaux pré et postcompression. Les traitements de signaux capables d'améliorer l'estimation du déplacement sont d'ailleurs étudiés par plusieurs auteurs (Céspedes *et al.*, 1993; O'Donnel *et al.*, 1994; Chaturvedi *et al.*, 1997; Varghese *et al.*, 1997b). L'intérêt pour ce sujet est justifié par le fait que plus l'estimation du déplacement sera précise, plus les élastogrammes construits à partir de ces signaux seront précis.

2.2.3.1 Les traitements de signaux les plus utilisés en élastographie

Les traitements de signaux constituent une partie importante de l'évaluation du champ de déplacement. Il convient donc de connaître les principaux traitements utilisés en élastographie. Dans cette section du mémoire, nous traitons des principaux traitements de signaux employés pour éliminer l'effet de la décorrélation entre les signaux pré et postcompression. Ensuite, nous effectuons un survol des traitements utilisés pour enrayer la dégradation des signaux due à des sources environnementales, ce qui nous permettra d'évaluer la complexité et le type de paramètre susceptible d'influencer l'estimation du mouvement.

De façon générale, la corrélation entre les images obtenues avant et après la compression se fait grâce à l'algorithme de *speckel tracking* (O'Donnel *et al.*, 1994). Ce processus de retraçage des diffuseurs (*speckel tracking*) implique quelques difficultés. En effet, la compression du tissu cause une diminution d'espacement entre les diffuseurs, qui résulte en une distorsion du signal mode A obtenu pour la postcompression. Il est donc clair que des traitements de signaux peuvent être effectués afin d'améliorer la corrélation entre les signaux pré et postcompression (Hein *et al.*, 1993) et éventuellement améliorer l'estimateur de déplacement.

O'Donnel *et al.* (1994) ont développé une méthode de minimisation de l'erreur sur l'estimé du déplacement. Ces auteurs proposent une méthode de reconstruction du module en travaillant avec des images de RSB élevé et donc de grandes déformations.

Les désavantages liés aux grands déplacements est qu'il est très difficile de faire un bon retraçage des diffuseur. En effet, les grands déplacements résultent en un mouvement des diffuseurs hors de la région d'étude induisant ainsi de la décorrélation. Cependant, grâce à l'utilisation de l'hypothèse de champ de déplacement continu à l'intérieur du tissu ainsi qu'à la segmentation du déplacement total en une suite de petits déplacements, ils ont néanmoins réussi à obtenir de bons résultats.

Varghese *et al.* (1997b) ont étudié la méthode *d'étirement temporel* afin de réduire la décorrélation dans un cas de matériau uniforme. Cette méthode consiste à étirer un signal de postcompression dans le temps de façon à compenser la déformation due à la compression. Théoriquement, l'expansion du signal postcompression devrait permettre de restaurer la cohérence entre les signaux et donc d'améliorer la corrélation et de réduire le bruit de décorrélation sur les images. Les résultats expérimentaux et simulés de Varghese *et al.* (1997b) ont démontré que de petites améliorations sur le coefficient de corrélation menaient à une grande amélioration dans le RSB pour des cas de matériau homogène.

Chaturvedi *et al.* (1997) soutiennent pour leur part que *l'étirement global*, semblable à l'étirement utilisé par Varghese *et al.* (1997b), restaure de façon partielle la cohérence entre les signaux. Pour un signal postcompression étiré d'une quantité équivalente à la déformation appliquée, la cohérence entre les signaux est rétablie de façon optimale seulement pour un matériau homogène. Par contre, comme nous l'avons vu précédemment, les tissus biologiques étudiés sont généralement hétérogènes et, par conséquent, le degré de déformation varie à travers tout le tissu. Ainsi, on comprend maintenant qu'une extension (du signal postcompression) équivalente à la valeur de déformation appliquée au système ne donnera pas nécessairement une cohérence idéale entre les signaux obtenus avant et après la compression. Chaturvedi *et al.* (1997) proposent donc une méthode d'étirement 2D local basée sur l'étirement local et l'algorithme SAD (*sum-absolute-difference*). Cet algorithme est appliqué après l'étirement global et avant la corrélation croisée faite pour estimer le déplacement le long d'un faisceau sonore. En fait, l'étirement global permet de détecter les déformations à grande échelle alors que l'étirement local permet de détecter les déplacements à échelle moyenne (Chaturvedi *et al.*, 1997). Ainsi, grâce à ce dernier type d'étirement, il est possible d'améliorer la qualité des signaux pour des matériaux non homogènes qui sont généralement caractérisés par des déformations d'ordres de grandeur différents à travers toute leur structure. Les résultats obtenus par Chaturvedi *et al.* (1997) démontrent que l'utilisation de l'étirement global combiné à l'étirement local permet d'obtenir des élastogrammes à bruit de décorrélation réduit.

Notons aussi que plusieurs réalités physiques viennent dégrader les signaux recueillis à l'aide des ultrasons. Par exemple, il est bien connu qu'il est nécessaire de compenser les variations de vitesse du son dans les tissus. La majorité des études suggèrent que ces variations de vitesse dues aux inhomogénéités sont surtout retrouvées à proximité de la peau. L'effet de ces aberrations de champ proche peut être réduit en ajoutant un délai compensatoire de temps au système (Flax *et al.*, 1988; Trahey *et al.*, 1993). Malheureusement, les barettes d'un transducteur sont généralement larges comparativement aux variations présentes dans un aberrateur. Alors, le délai compensatoire ajouté sur un élément laisse des variations résiduelles dans le profil de décalage du temps de cet élément (Walker *et al.*, 1997). Walker *et al.* (1997) démontrent que ces résidus peuvent devenir une source importante d'erreur sur les images et que la correction apportée sur les aberrations de champ proche peut, dans certains cas, être beaucoup plus compliquée qu'on pourrait être porté à le croire.

On remarque donc que la modélisation de phénomènes biologiques comprend souvent une série d'hypothèses qui peuvent parfois s'avérer plus ou moins adéquates. La correction du phénomène étudié par Walker *et al.* (1997) permet d'améliorer encore légèrement la qualité de l'image obtenue. En effet, plus la représentation du champ de déplacement est fidèle à la réalité plus la qualité de l'image de déformation est améliorée.

En bref, il est important de retenir qu'il existe plusieurs facteurs qui influencent l'estimateur de déplacement, et que le bruit de décorrélation retrouvé sur le champ de déplacement peut être réduit à l'aide de plusieurs types de traitements de signaux. Notons d'ailleurs que les divers types de traitement de signaux mènent inévitablement à différentes qualités d'élastogrammes. Nous verrons que le *strain filter* représente un outil utile qui permet d'évaluer quantitativement la qualité des élastogrammes.

2.2.3.2 Le strain filter

Le *strain filter* consiste en une représentation graphique et analytique de la plage de déformation permise et du RSB_e (rapport signal sur bruit de l'élastogramme) obtenu pour une résolution donnée (Varghese *et al.*, 1997a). Ainsi, la largeur du *strain filter* spécifie la plage dynamique de déformation, alors que la hauteur spécifie le RSB_e pour les déformations données. Un *strain filter* idéal est capable de détecter tous les ordres de déformation (plage dynamique infinie) et possède un RSB_e infiniment élevé (hauteur infinie). La figure 2.2 représente des courbes typiques du *strain filter* pour différentes largeurs de bande à une fréquence d'acquisition de 5 MHz.

Le *strain filter* prédit la qualité d'un élastogramme en fonction des traitements de signaux et des paramètres du système utilisés pour obtenir l'élastogramme (Varghese *et al.*, 1997a). De plus, le *strain filter* permet de comparer quantitativement les performances des différentes techniques de traitements de signaux utilisées dans la construction d'une image élastographique (Varghese *et al.*, 1997a). En effet, en évaluant la plage dynamique et le RSB_e obtenus pour les différentes techniques, une classification en terme de performance peut être faite.

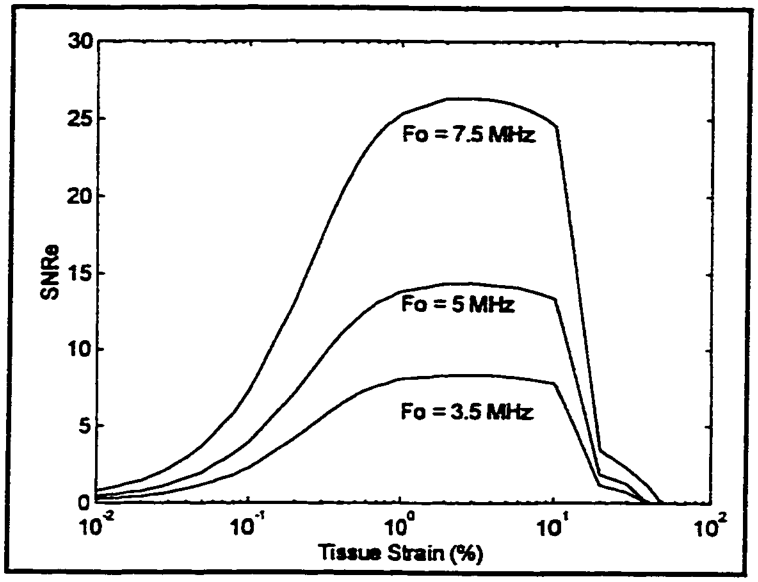


Figure 2.2 : Groupe de *strain filter* pour différentes fréquences centrales.
(Tiré de Varghese *et al.*, 1997).

2.2.4 Les problèmes majeurs d'élastographie relevés jusqu'à ce jour

L'élastogramme est une image 2D de la déformation interne d'une structure. Cette image obtenue à l'aide d'un système non invasif nous donne des informations sur la présence de lésions dans la structure. Par contre, l'élastogramme ne représente pas toujours fidèlement les différentes rigidités qui forment la structure et donne parfois des images difficiles à interpréter.

En effet, en prenant comme hypothèse un champ de contrainte constante, l'élastogramme peut être interprété comme une mesure relative de la distribution d'élasticité (Kallel *et al.*, 1995). Par contre, expérimentalement, la compression du tissu se fait non pas dans des conditions de force contrôlée mais bien dans des conditions de déplacement contrôlé. Or, il est connu qu'un déplacement contrôlé uniforme ne résulte pas nécessairement en une contrainte uniforme (Ponnekanti *et al.*, 1994; Saada, 1989). Ponnekanti *et al.* (1994) ont d'ailleurs signalé que la dimension, la forme du compresseur ainsi que les conditions aux frontières sont des facteurs qui affectent la distribution de contrainte dans le matériau. Cette non-uniformité de la distribution de contrainte résulte en un artefact (*target hardening* ou durcissement de structure) qui est responsable de l'augmentation de rigidité en fonction de la profondeur. En effet, plus on s'éloigne de la frontière, plus l'amplitude de la déformation semble faible, donc plus le matériau apparaît rigide. La non-uniformité de contrainte résulte aussi en des zones de concentration de contrainte dans les régions situées en périphérie des compresseurs. Toutefois, des études (Ophir *et al.*, 1991; Konofagou *et al.*, 1996) démontrent qu'il est possible de diminuer l'effet de non-uniformité de contrainte.

À cet égard, Ophir *et al.* (1991) soutiennent que l'hypothèse de champ de contrainte constante est valable surtout pour un cas où la dimension du compresseur est égale ou supérieure à la profondeur de pénétration du faisceau ultrasonore. Aussi, Konofagou *et al.* (1996) ont travaillé sur la réduction de la non-uniformité de contrainte à l'aide de la méthode *d'apodisation* de déplacement. Cette méthode est basée sur le principe de réciprocité : si la distribution de déplacement d'une cible qui résulte d'une application de déplacement constant est appliquée au compresseur, la distribution de contrainte devrait alors être uniforme. Les auteurs démontrent que cette méthode permet d'améliorer la non-uniformité latérale associée aux zones de concentration de contrainte mais qu'elle n'a aucun effet sur la non-uniformité axiale.

L'élastographie possède aussi des limitations majeures dans sa capacité à discerner des inclusions molles dans un arrière-plan dur. L'introduction du paramètre d'*efficacité de transfert de contraste* (ETC) permet d'illustrer ces limitations. Ce paramètre, tel que défini par Ponnekanti *et al.* (1995), est représenté par le rapport du contraste observé (mesuré sur l'élastogramme) sur le vrai contraste.

Ponnekanti *et al.* (1995) ont démontré que les élastogrammes ont une bonne efficacité de transfert de contraste dans des cas d'inclusions dures mais engendrent une sous-estimation de contraste dans des cas d'inclusions molles. Dans les cas où les lésions molles sont entourées de tissu rigide, la force appliquée sur la structure est absorbée par le matériau rigide; la déformation de l'inclusion devient donc impossible ou du moins restreinte. Cet effet se répercute dans les courbes de contraste et explique la faible efficacité de transfert de contraste (ETC) qu'on retrouve sur les élastogrammes dans les cas d'inclusions plus molles que l'arrière-plan. Kallel *et al.* (1996c) ont d'ailleurs confirmé ces résultats de simulations par le biais d'un modèle analytique capable de prédire le contraste observé sur l'élastogramme. Ils ont aussi démontré (Kallel *et al.*, 1996a) que, dans un cas de conditions aux frontières de déplacement, l'efficacité de transfert de contraste est de 1 à 6 % plus faible que dans un cas de conditions de force. Ces auteurs croient que l'efficacité de transfert de contraste peut être améliorée davantage en utilisant la résolution du problème inverse (Kallel *et al.*, 1996b; Kallel *et al.*, 1996a).

À la lumière de ce qui précède, on peut noter que l'élastographie conventionnelle souffre de plusieurs problèmes. Ophir *et al.* (1997) et Kallel *et al.* (1996a) effectuent d'ailleurs un bon survol de tous les artefacts présents dans un élastogramme et des différentes causes possibles. Afin d'éviter certains de ces artefacts, il est connu que l'élastographie peut être étudiée dans le cadre de la résolution du problème inverse (Ophir *et al.*, 1997; Kallel *et al.*, 1996a; Kallel *et al.*, 1996b).

2.2.5 L'élastographie dans le cadre de la résolution du problème inverse

Outre le champ de déformation, les signaux ultrasonores nous permettent d'obtenir de l'information additionnelle sur la structure interne des tissus. En effet, en connaissant la distribution des forces appliquées et les conditions aux frontières, il est possible d'obtenir une image du module en résolvant le problème inverse. Cette méthode nécessite l'utilisation d'un modèle mécanique afin de simuler le comportement du tissu soumis à une compression. Jusqu'à maintenant, c'est surtout le modèle mécanique linéaire qui a été utilisé. Skovoroda *et al.* (1994) ont d'ailleurs comparé les résultats obtenus pour l'image de déformation d'un cas expérimental à ceux obtenus analytiquement à l'aide du modèle élastique linéaire. Ils ont conclu que le modèle est adéquat puisque les mesures de déformation obtenues expérimentalement étaient très comparables à celles prédites par le modèle.

De façon générale, deux grandes méthodes sont présentement utilisées afin de reconstruire le module à partir de la déformation : la méthode des perturbations utilisée par Kallel *et al.* (1996a) et la méthode de reconstruction indépendante des conditions aux frontières physique de l'interface tissu/compresseur (Skovoroda *et al.*, 1995; Sumi *et al.*, 1995; Rahvagan *et al.*, 1994; Emilianov *et al.*, 1995).

La *méthode de perturbation* consiste à résoudre itérativement le problème inverse afin de trouver le champ de module qui est le plus susceptible d'être responsable du champ de déplacement observé. Dans Kallel *et al.* (1996a), l'utilisation d'un modèle par éléments finis permet de déterminer le champ de déplacement à l'aide des équations d'élasticité et ainsi de résoudre le problème direct. Ensuite, la méthode d'optimisation de Gauss-Newton est utilisée pour minimiser, au sens des moindres carrés, l'erreur entre le champ de déplacement prédit par le modèle et celui mesuré à l'aide des signaux ultrasonores.

Le problème de conditionnement de la matrice hessienne, que l'on retrouve dans les équations de la résolution du problème inverse, est éliminé en utilisant la régularisation de Tikhonov. Le choix du paramètre de régularisation (λ) est complexe et il existe plusieurs méthodes pour le déterminer. Dans l'étude de Kallel *et al.* (1996c), le paramètre de régularisation a tout d'abord été déterminé de façon heuristique. Ainsi, le choix du λ se fait de façon à avoir une image qui traduit bien la présence de nodules étant donné que la solution est connue. Par contre, dans les cas expérimentaux où les signaux RF proviennent d'un tissu dont on ne connaît pas la morphologie exacte, il est très difficile de trouver un λ adéquat puisque la solution est inconnue.

Plus tard, Kallel *et al.* (1996b) ont choisi d'utiliser la méthode de validation croisée généralisée VCG (Golub *et al.*, 1979) afin de déterminer le lambda optimal de façon systématique. Aussi, grâce aux simulations, ces mêmes auteurs ont démontré que certains artefacts observés sur les images de déformation ne se retrouvaient pas sur les images de module.

Il existe une autre méthode pour obtenir une image de module de Young ou de module de cisaillement. En effet, certains groupes proposent une méthode capable de réduire les artefacts présents dans une image de déformation en utilisant une procédure de reconstruction basée sur la résolution d'équations différentielles traduisant l'équilibre mécanique d'un milieu déformé.

Cette méthode de reconstruction est une procédure indépendante des conditions aux frontières globales. Le problème se réduit à détecter la frontière de l'inclusion pour finalement reconstruire le module à cette frontière par le biais de l'application de conditions de continuité de contrainte. Ceci implique que seule la distribution de déformation au voisinage immédiat de la frontière de l'inclusion est nécessaire pour reconstruire le module.

Cette méthode est une procédure en deux étapes (la détection des frontières et leur reconstruction) qui permet d'obtenir une élasticité reconstruite qui est relative au module trouvé sur la frontière. Malgré la nature relative des résultats, les artefacts dus aux conditions aux frontières globales dans l'image de déformation sont éliminés. Emilianov *et al.* (1995) ont d'ailleurs procédé à des expériences *in vitro* à l'aide de fantômes pour valider la méthode.

Sumi *et al.* (1995) utilisent aussi un processus de détection de contour de l'inclusion. Ces auteurs détectent les endroits où il y a une variation de déformation en observant l'image de la dérivée du tenseur de déformation. Ensuite, en appliquant l'hypothèse de continuité de contrainte à l'équation d'équilibre statique d'un système mécanique, ils obtiennent un ensemble d'équations linéaires où les inconnues sont les dérivées spatiales du module de cisaillement relatif et où les coefficients sont les déformations ainsi que leurs dérivées. Ainsi, le module de cisaillement relatif d'un point par rapport à un autre peut être déterminé en effectuant une intégration linéaire du gradient du module. À l'aide d'une simulation, ils ont d'ailleurs développé un algorithme de reconstruction par lequel la distribution 2D du module de cisaillement peut être déterminée à partir de l'information du champ de déplacement 1D ou 2D d'un cas linéaire isotrope incompressible sous des conditions d'état plan de contrainte. Notons que cette méthode est très similaire à celle utilisée par Skovoroda *et al.* (1995).

Voilà donc un bref résumé de ce qui a été fait jusqu'à ce jour en élastographie. On peut maintenant bien comprendre que l'élastographie est une méthode non invasive construite à l'aide de signaux ultrasonores sur lesquels certains traitements de signaux doivent être appliqués afin d'améliorer les images. Cette méthode est d'ailleurs dépendante des performances du système ultrasonore et des types de traitements de signaux utilisés dans la construction de l'image. Ces images donnent des information de déformation de toute la structure interne du tissu soumis à une compression. L'élastogramme possède aussi des artefacts qui peuvent nuire à la lecture des images et rendre leur interprétation plus difficile. Par contre, la résolution du problème inverse en élastographie permet d'obtenir directement une image de rigidité et permet aussi de réduire la plupart des artefacts que l'on retrouve sur un élastogramme conventionnel.

3 Théorie sur l'image de déformation et la résolution du PD

Ce chapitre comporte toutes les notions nécessaires à l'évaluation et à la compréhension des résultats présentés dans ce mémoire. Nous verrons que l'élastogramme peut être formé directement à l'aide de données expérimentales provenant d'un système ultrasonore ou bien à l'aide d'une simulation par la résolution du problème direct (PD).

Une brève description du mode d'acquisition des données expérimentales nous permettra de comprendre la méthode utilisée pour reconstruire le champ de déplacement à l'aide d'un système ultrasonore. Nous verrons aussi que, pour obtenir un champ de déplacement expérimental simulé, il est nécessaire d'utiliser un modèle capable de décrire le comportement mécanique d'un tissu mou soumis à une compression. Ainsi, lorsque les hypothèses et la description du modèle seront établies, nous exposerons la méthode des éléments finis utilisée pour résoudre le problème direct et obtenir le champ de déplacement expérimental simulé. Pour terminer, nous validerons le modèle en comparant les résultats obtenus analytiquement à ceux obtenus par simulation. Nous effectuerons cette comparaison des résultats à l'aide de la notion d'efficacité de transfert de contraste (ETC) que nous expliquerons préalablement.

3.1 Construction d'un élastogramme à partir de données ultrasonores

L'élastographie est basée sur l'hypothèse que des changements pathologiques sont associés à des changements dans la rigidité du tissu (Ophir *et al.*, 1996). Le but ultime de l'élastographie est donc de déterminer la présence de nodules plus durs ou plus mous que le tissu environnant en examinant une image d'élasticité ou de déformation.

Puisque la théorie d'élasticité stipule que la déformation peut être obtenue en calculant le gradient du champ de déplacement d'un tissu soumis à une force externe de compression, l'information nécessaire à la construction d'une image de déformation est le champ de déplacement. Malheureusement, il n'existe aucune modalité d'imagerie qui puisse donner directement les informations relatives aux déplacements internes d'un tissu. Ces déplacements sont donc reconstruits à l'aide de corrélation entre des signaux RF provenant d'un système ultrasonore.

Lorsqu'un matériau est soumis à une contrainte uniaxiale constante, tous les points à l'intérieur du matériau subissent une déformation principalement dans la direction de l'application de la force. L'acquisition de signaux ultrasonores pré et postcompression permet de déterminer les déplacements internes du tissu. Le champ de déplacement obtenu est généralement non uniforme puisque les régions ayant une plus grande rigidité se déplacent moins que les régions à faible rigidité. Ensuite, grâce au calcul du gradient du champ de déplacement, il est possible de construire une image de déformation interne du tissu, appelée *élastogramme*.

3.1.1 Généralités des ultrasons

En raison de la facilité d'utilisation et du faible risque associé aux ultrasons, cette technique est de plus en plus utilisée en imagerie médicale. En effet, contrairement aux rayons X qui génèrent une énergie assez élevée pour éjecter les électrons de leur orbite, les ondes ultrasonores impliquent des transformations énergétique réversibles de façon à ce que la structure moléculaire des tissus humains ne soit pas altérée (Christensen, 1988).

L'instrumentation médicale ultrasonore utilise des fréquences variant généralement entre 1 et 20 MHz, et la valeur est généralement fixée de manière à atteindre un compromis entre une bonne résolution (faible longueur d'onde ou fréquence élevée) et une atténuation réduite (fréquence faible ou longueur d'onde élevée). Le transducteur, qui est généralement posé directement sur la peau, génère une onde sonore en convertissant de l'énergie thermique, magnétique ou électrique en énergie mécanique. L'onde ainsi créée se propage librement à l'intérieur du tissu. À l'interface entre deux types de tissu, une partie de l'onde incidente est réfléchie et captée par le transducteur, alors que l'autre partie continue à être transmise. La portion d'onde qui continue à être transmise permet de détecter des interfaces plus profondes ou finit par s'estomper. Le temps écoulé entre l'émission de l'onde et l'arrivée de sa partie réfléchie représente l'information de base nécessaire à la détermination de la position de l'interface. Ainsi, la distance (*d*) qui sépare l'interface et le transducteur peut être exprimée par :

$$d = \frac{1}{2} tc \qquad (3.1)$$

où t et c représentent respectivement le temps aller-retour et la vitesse de l'onde dans le milieu.

La distance de pénétration des signaux varie selon la vitesse d'atténuation associée à chaque type de tissu. Par exemple, à une fréquence donnée, la distance maximale de pénétration d'un signal ultrasonore dans un tissu comme les os est beaucoup plus faible que celle que l'on retrouve dans les tissus mous, puisque la vitesse de l'onde dans le milieu osseux est très faible et l'atténuation très élevée. Ainsi, les régions du corps entourées par des os sont difficilement accessibles par ultrason.

Notons que la fréquence du transducteur peut aussi affecter la distance de pénétration. Ainsi, pour avoir une profondeur de pénétration élevée dans un tissu très peu compressible comme les os, la fréquence doit être élevée. Mais, puisque la fréquence affecte aussi la résolution, un compromis entre la distance de pénétration et la fréquence doit être atteint. Ce compromis consiste à choisir entre une fréquence faible de manière à avoir une bonne pénétration mais une résolution faible ou une fréquence plus élevée afin d'obtenir une bonne résolution mais une profondeur de pénétration plus faible. Par exemple, pour l'obstétrique qui représente une application où la profondeur de pénétration est un facteur important, le transducteur opère généralement à des fréquences situées entre 2 et 5 MHz. Par contre, en imagerie intra-artérielle, les fréquences utilisées se situent entre 20 et 30 MHz puisqu'une résolution en deçà du millimètre est nécessaire (Bronzino, 1995). Pour l'élastographie, on privilégie généralement une fréquence autour de 5 MHz.

3.1.2 Détermination du champ de déplacement expérimental

La détermination d'un champ de déplacement à l'aide d'ultrasons, nécessite l'application de forces externes. En effet, en évaluant la position des diffuseurs avant et après la compression, il est possible de calculer le champ de déplacement. Les signaux échos sont donc divisés en paires de fenêtres temporelles pour lesquelles l'espacement (ΔT) est, de façon générale, de 10 % à 20 % plus petit que la grosseur des fenêtres (Céspedes *et al.*, 1993). Ces paires de fenêtres sur les signaux pré et post-compression sont comparées en utilisant une technique de corrélation croisée appliquée sur deux fenêtres (Hein *et al.*, 1993; Céspedes *et al.*, 1993). Ainsi, le décalage dans le temps, qui existe pour un point donné de la fenêtre proximale entre les signaux pré et post-compression, est appelé $\Delta t_{(i-1)}$, alors que celui trouvé pour la fenêtre distale est appelé $\Delta t_{(i)}$. Alors, après la compression du spécimen, l'espacement entre la paire de fenêtres est réduit de :

$$\Delta t_{(i)} - \Delta t_{(i-1)}$$

En supposant que la compression appliquée sur le tissu est assez petite pour qu'il n'y ait qu'une légère distorsion à l'intérieur même d'une fenêtre, il est possible de déterminer la déformation axiale à l'aide de l'équation suivante :

$$\varepsilon = \frac{\Delta T - \left(\Delta T - \left(\Delta t_{(i)} - \Delta t_{(i-1)}\right)\right)}{\Delta T} = \frac{\Delta t_{(i)} - \Delta t_{i-1}}{\Delta T} \qquad \textit{(3.2)}$$

Ce processus, qui est répété pour toutes les paires de lignes A, permet la construction d'un tableau de déformations. Enfin, pour former un élastogramme, chaque valeur du tableau est associée à un pixel auquel est assigné une intensité de gris correspondante (Ophir *et al.*, 1991).

Notons que la compression du tissu provoque une réduction de l'espacement entre les diffuseurs qui résulte en une distorsion du signal postcompression. Ainsi, il est impossible d'obtenir une superposition parfaite entre les signaux de pré et de postcompression. Par contre, lorsque l'erreur des moindres carrés entre les deux signaux est minimisée, la fonction de corrélation croisée des signaux est à son niveau maximal. D'ailleurs, comme nous l'avons vu au chapitre 2, ce problème de superposition peut être surmonté, puisqu'il existe plusieurs types de traitements de signaux capables de diminuer les erreurs engendrées par la manipulation des signaux pré et postcompression.

Compte tenu de ce qui précède, nous comprenons que les ultrasons permettent de déterminer les mouvements internes de toute la structure en compression. Ce principe, qui s'inspire en quelque sorte de la méthode de détection par palpation, se nomme *élastographie*.

3.2 Construction d'un élastogramme à partir de données simulées

À la lumière de ce qui précède, il apparaît clairement que la détermination du champ de déplacement est la base de la formation d'un élastogramme. Ce champ de déplacement peut être obtenu par corrélation entre les signaux pré et postcompression ou à l'aide d'une simulation par éléments finis. Dans les simulations, l'environnement du système est parfaitement contrôlable et les résultats obtenus peuvent être évalués plus facilement. Ces conditions idéales permettent donc de bien détecter l'effet d'un paramètre sur la solution obtenue. C'est principalement pour ces raisons que, à moins de d'indication contraire, le champ de déplacement expérimental utilisé dans cette étude correspond à un champ simulé. La résolution du problème direct permet justement de construire un élastogramme (figure 3.1) à l'aide de données simulées. Sur la figure 3.1 il est possible de détecter une zone plus rigide associée à une déformation plus faible.

Afin d'obtenir ce type d'image, il est nécessaire de traduire mathématiquement le comportement mécanique d'un tissu mou soumis à une compression. En effet, grâce à un certain nombre d'hypothèse, il est possible d'obtenir une équation elliptique qui permet de déterminer approximativement, à l'aide des éléments finis, le déplacement interne du tissu.

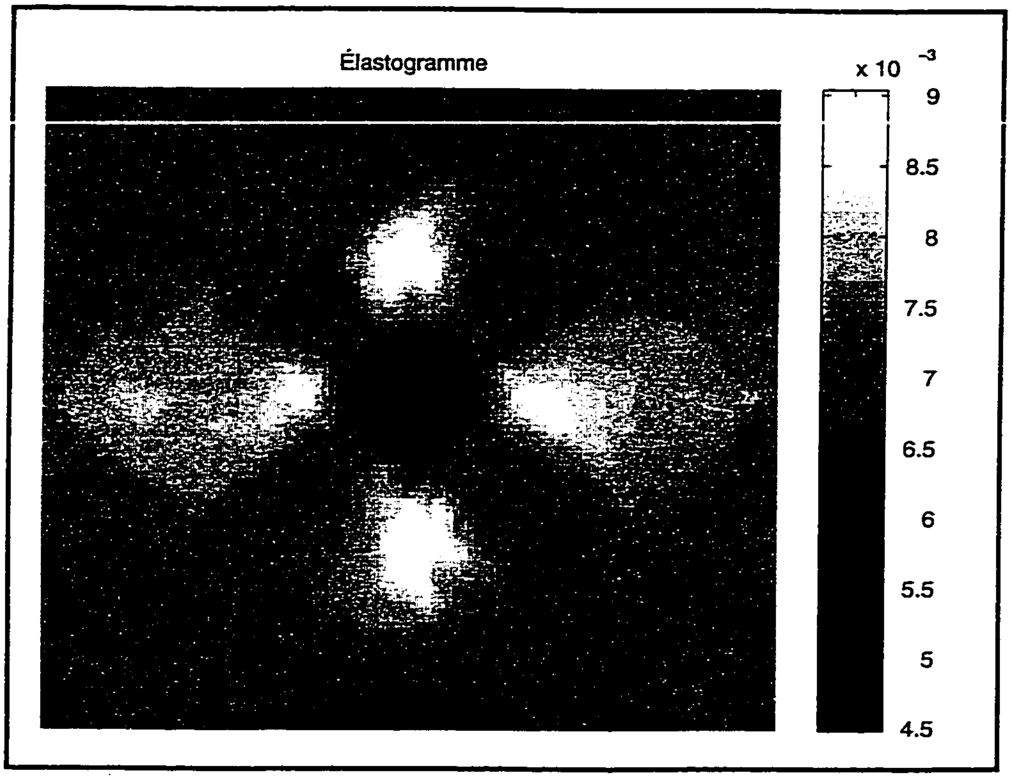


Figure 3.1 : Élastogramme simulé.
Dans une image de déformation, les zones plus rigides sont représentées par des zones noires alors que les zone blanches représentent des régions plus molles. Simulation effectuée avec des conditions aux frontières de quasi-glissement et un maillage de 724 éléments.

3.2.1 Les hypothèses sur la théorie de l'élasticité

Afin d'obtenir un champ de déplacement simulé, il est nécessaire de résoudre le problème direct qui consiste à déterminer les déplacements internes d'une structure, en ne connaissant que la valeur des forces de compression et la rigidité du matériau. Pour ce faire, on doit faire appel à la théorie de l'élasticité afin de décrire mathématiquement, à l'aide des équations constitutives, le comportement mécanique du matériau.

Définir les équations constitutives est une tâche très complexe pour les tissus mous qui sont, de façon générale, des matériaux non linéaires, viscoélastiques et anisotropes (Fung, 1993). Le comportement mécanique du tissu mammaire en compression doit donc subir quelques simplifications avant d'être décrit mathématiquement. Par exemple, dans le cas d'un corps parfaitement élastique, la contrainte (σ) est directement proportionnelle à la déformation (ε). Mathématiquement, ce cas peut être représenté par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad \textit{(3.4)}$$

où C_{ijkl} et ε_{kl} sont respectivement les tenseurs d'élasticité et de déformation et σ_{ij} représente la contrainte qui est située dans un plan perpendiculaire à l'axe des *i* et qui se dirige dans la direction des *j*. La résolution de cette équation nécessite la connaissance de 81 constantes. Il est donc nécessaire d'introduire d'autres hypothèses afin de pouvoir résoudre plus facilement ce problème. En effet, ce nombre de constantes peut être réduit à 9 pour une hypothèse d'orthotropie, à 5 pour une isotropie transverse et à 2 pour une isotropie (Saada, 1989).

Notons qu'étant donné que les compressions se font lorsque l'état d'équilibre est atteint, il est possible d'utiliser l'hypothèse d'élasticité. Ainsi, grâce aux hypothèses d'élasticité, d'isotropie[2], de linéarité et d'incompressibilité, un matériau peut être complètement caractérisé à l'aide des deux constantes de Lamé (μ et λ) (Shames *et al.*, 1992) :

$$\sigma_{kl} = 2\mu\varepsilon_{kl} + \lambda\delta_{kl}\varepsilon_{mn} \qquad \textit{(3.5)}$$

où δ_{kl} représente le delta de Kronecker, qui vaut un quand l=k et zéro autrement. Ensuite, une hypothèse d'état plan de déformation est ajoutée en supposant qu'il existe des déformations seulement dans le plan parallèle à la direction de propagation des ondes ultrasonores. Skovorada *et al.* (1995) ont d'ailleurs démontré que l'état plan de déformation décrit bien l'état de déformation pour des cas d'inhomogénéité cylindrique. Pour un état plan de déformation, toutes les déformations possibles peuvent être définies en termes de déplacements (u, v) sous la forme :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 2\varepsilon_{xy}
\end{aligned} \qquad \textit{(3.6 a,b,c)}$$

où ε_{xx} et ε_{yy} représentent respectivement la déformation normale en x et en y alors que γ_{xy} représente le cisaillement. Notons que ces équations sont vraies uniquement pour des cas de petites déformations. La relation contrainte/déformation d'un milieu élastique et linéaire est donnée par (Shames *et al.*, 1992) :

---

[2] Un matériau isotrope possède des propriétés élastiques indépendantes de l'orientation des axes.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right) \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}\right)\right) \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}
\end{aligned} \qquad \textit{(3.7 a,b,c)}$$

où E et G représentent respectivement le module d'Young et le module de cisaillement et ν le coefficient de Poisson. Pour un corps en équilibre avec les hypothèses d'isotropie, d'élasticité linéaire, d'incompressibilité et d'état plan de déformation, la deuxième loi de Newton peut s'exprimer ainsi (Cook, 1989) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0
\end{aligned} \qquad \textit{(3.8 a,b)}$$

Dans ces deux équations, F_x et F_y représentent les forces volumiques en x et en y; τ_{xy}, σ_x et σ_y représentent respectivement la contrainte de cisaillement dans le plan XY et la contrainte normale au plan X ou Y, selon l'indice du symbole σ.

Maintenant que les hypothèses sur la théorie d'élasticité sont bien définies, il est possible de prédire le comportement mécanique du tissu mammaire à l'aide d'une simulation et de la résolution du problème direct.

3.2.2 L'équation elliptique

Dans un cas de données expérimentales simulées, il est possible d'obtenir un champ de déplacement à l'aide de la résolution du problème direct. En écrivant l'équation *(3.5)* en coordonnées cartésiennes et en utilisant seulement les termes de déformations normales, il est possible d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2G\varepsilon_{xx} \\
\sigma_{yy} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2G\varepsilon_{yy} \\
\sigma_{zz} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy}
\end{aligned} \qquad \textit{(3.9 a,b,c,d)}$$

Les équations précédentes peuvent être écrites sous une forme plus connue à l'aide des équations constitutives qui caractérisent l'état plan de déformation. Sachant que (Shames *et al.*, 1992) :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \textit{(3.10)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \textit{(3.11)}$$

il est possible de retrouver les équations constitutives suivantes :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right] \\
\sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right] \\
\sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}(\gamma_{xy})
\end{aligned} \qquad \textit{(3.12 a,b,c,d)}$$

Il est important de noter qu'il existe une contrainte dans la direction des z sans pour autant qu'il y ait une déformation dans cette direction. Ce phénomène est une caractéristique propre à l'état plan de déformation.

Ces équations constitutives peuvent se présenter sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} c_{11} &= c_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ c_{12} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ c_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu \end{aligned} \qquad \textit{(3.13)}$$

Notons que la loi de Hooke est vraie pour de petites déformations. Pour des cas de compressions relativement élevées, la déformation totale est divisée en une série de petites compressions de façon à assurer la véracité de l'hypothèse d'élasticité. De plus, grâce à ces petits déplacements cumulés, les problèmes de décorrélation entre les images pré et postcompression sont réduits (Emilianov *et al.*, 1995; O'Donnel *et al.*, 1994).

Maintenant, à l'aide des équations *(3.8)*, *(3.12)*, *(3.13)*, il est possible de déterminer les équations d'équilibre en état plan de déformation :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}\left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left[c_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] &= F_x \\ -\frac{\partial}{\partial x}\left[c_{33}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= F_y \end{aligned} \qquad \textit{(3.14 a,b)}$$

Ces équations correspondent à la forme elliptique utilisée dans la méthode des éléments finis. Cette méthode, basée sur le principe de discrétisation d'un domaine en plusieurs éléments, permet de déterminer approximativement le champ de déplacement du tissu, ce qui rend possible la détermination du champ de déformation présenté à la figure 3.1.

3.2.3 Les éléments finis

La résolution par éléments finis peut être utilisée dans plusieurs types de problèmes régis par des équations aux dérivées partielles. D'ailleurs, il est possible de classer la plupart des équations aux dérivées partielles qui décrivent les phénomènes physique en trois grandes classes :

équation elliptique : $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$

équation parabolique : $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$

équation hyperbolique : $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0$

Des exemples typiques pour les équations paraboliques et hyperboliques sont respectivement l'étude de la diffusion de chaleur et l'évaluation de la propagation d'ondes mécaniques ou électromagnétiques. Dans le cas présent, le type d'équation qui nous intéresse est l'équation elliptique. En effet, ce type d'équation est représentatif entre autre des problèmes de déformation d'un solide. La fonction elliptique qui s'applique à notre type de problème peut s'écrire sous forme compacte :

$$-\nabla\cdot(C\cdot\nabla U)=F \tag{3.15}$$

où C représente un tenseur d'ordre quatre, U les déplacements en deux dimensions (u, v) des éléments et F, les forces volumiques. Notons que le développement de l'équation *(3.15)* donne exactement l'équation *(3.14)*.

De façon générale, la solution d'un système par éléments finis nécessite la connaissance des conditions aux frontières. Ensuite, la division du domaine en un nombre fini d'éléments rend possible la détermination du déplacement de chaque nœud d'un élément. L'assemblage des éléments qui forment la structure établit alors les liens entre chacun de ces éléments. Enfin, l'application des conditions aux frontières nous permet de résoudre l'équation elliptique et d'obtenir le déplacement de tous les nœuds de la structure. Nous allons maintenant examiner un peu plus en détail la description de ces étapes nécessaires à la résolution par éléments finis.

3.2.3.1 Les conditions aux frontières en éléments finis

Il existe deux grandes catégories de conditions aux frontières en éléments finis : les conditions de déplacement et les conditions de force. Les conditions de force ou conditions de Neumann sont des conditions qui sont aussi appelées conditions naturelles puisque, comme nous le verrons plus loin, les termes nécessaires à l'application de ce type de condition apparaissent naturellement lors du développement de la forme variationnelle. Ces conditions ne sont toutefois pas pleinement satisfaites et sont formulées de la façon suivante :

$$\sigma\bar{n} = g \qquad \textit{(3.16)}$$

où $\bar{n}$ représente le vecteur normal à la surface et g les forces imposées.

En état plan de déformation, les équations de conditions de force peuvent s'écrire:

$$\begin{aligned}\sigma_x\bar{n}_x + \tau_{xy}\bar{n}_y &= g_x \\ \tau_{xy}\bar{n}_x + \sigma_y\bar{n}_y &= g_y\end{aligned}$$

Les conditions de déplacement (aussi appelées conditions de Dirichlet) sont, pour leur part, des conditions essentielles pleinement satisfaites puisque les valeurs imposées sont appliquées directement dans le vecteur de déplacement.

Une des méthodes possibles pour gérer l'application des conditions de déplacement, est l'ajout de termes à la matrice de rigidité. En effet, afin de s'assurer que les déplacements imposés soient bien satisfaits, il est nécessaire d'ajouter des ressorts très rigides aux endroits où des conditions de déplacement sont spécifiées. Pour ce faire, des termes, pouvant être jusqu'à 10^{11} fois plus élevés que les valeurs présentes dans la matrice de rigidité [K], sont ajoutés à celle-ci par l'intermédiaire d'une matrice [P] que l'on nomme *matrice de pénalité*. Les termes non nuls de cette matrice [P] se situent, sur la diagonale, aux nœuds où des conditions de déplacement sont spécifiées.

Les démarches nécessaires à l'application des conditions aux frontières de déplacement et de forces sont décrites en détail dans une section subséquente (3.2.3.5) du mémoire. En éléments finis, après avoir bien déterminé les conditions aux frontières du système, on doit transformer l'équation continue en équations discrètes.

3.2.3.2 Approximation de l'équation continue en équations discrètes

L'approximation d'une fonction continue par un modèle discret constitue un concept fondamental de la résolution par éléments finis. Le domaine (Ω) de la fonction continue est divisé en un nombre fini d'éléments. Pour chacun des nœuds d'un élément, une fonction d'interpolation (N_i) est définie afin de déterminer leur déplacement. Pour évaluer approximativement les déplacements d'un système à deux degrés de liberté (en permettant les déplacements dans le plan xy), nous utilisons une représentation polynomiale d'ordre 1 comme fonction d'essai.

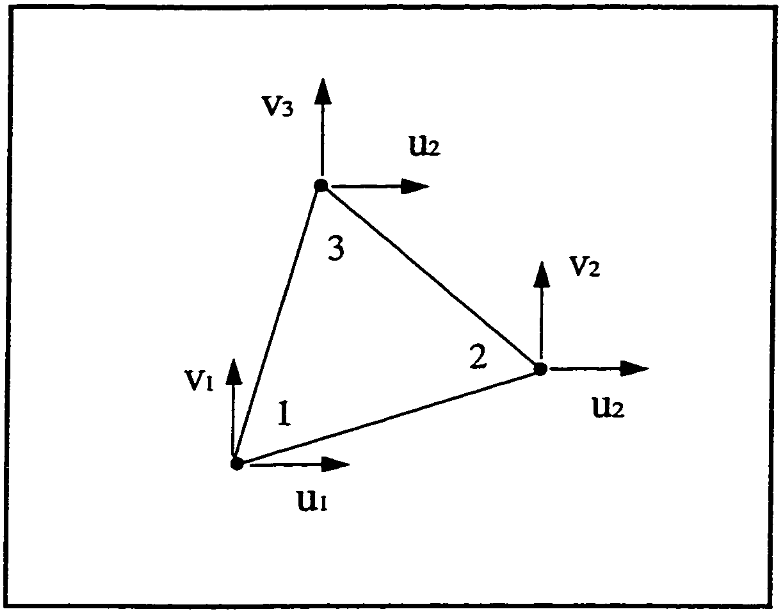


Figure 3.2 : Élément triangulaire à deux degrés de liberté.
Les symboles u et v représentent respectivement les déplacements dans la direction latérale et axiale.

Ces fonctions d'essai (N_i) doivent remplir des conditions de représentation constante et de continuité afin de s'assurer que la solution par éléments finis converge vers la solution exacte lorsque la dimension du maillage tend vers zéro (Gallagher, 1976). Pour ce qui est de la représentation constante, U et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre m (ordre du système) doivent avoir une valeur constante. Pour la continuité dans le domaine d'un élément et à la frontière de deux éléments, U et toutes ses dérivée d'ordre m-1 doivent être continues. Ainsi, on peut exprimer les déplacements d'un élément en fonction des déplacements des nœuds à l'aide de polynômes d'ordre 1 capables de satisfaire ces conditions[3] :

[3] Même si le système est au départ d'ordre 2, il est possible d'approximer le déplacement par des polynômes d'ordre 1 puisque les éléments finis seront résolus à l'aide de la méthode des résidus pondérés par le critère de Galerkin. Nous verrons que cette méthode permet de réduire le système d'ordre 2 en ordre 1 par le biais d'une intégration par partie.

$$u(X,Y)=\alpha_1+\alpha_2 X+\alpha_3 Y$$
$$v(X,Y)=\beta_1+\beta_2 X+\beta_3 Y \qquad \textit{(3.17 a,b)}$$

où u(x, y) et v(x, y) représentent respectivement les déplacements dans la direction des x et dans la direction des y d'un élément. Les déplacements en x et y des nœuds d'un élément peuvent être exprimés sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \qquad \textit{(3.18 a,b)}$$

où n représente le nombre de nœuds utilisés. Pour le cas présentement étudié, le maillage est constitué d'éléments triangulaires simples (n = 3) dans lesquels on suppose les propriétés constantes.

Puisque les équations précédentes *(3.18 a,b)* peuvent s'écrire sous la forme :

$$\{u\}=[A]\{\alpha\}$$
$$\{v\}=[A]\{\beta\} \qquad \textit{(3.19 a,b)}$$

alors

$$\{\alpha\}=[A]^{-1}\{u\}$$
$$\{\beta\}=[A]^{-1}\{v\} \qquad \textit{(3.20 a,b)}$$

Maintenant, en remplaçant les équations *(3.20 a,b)* dans les équations *(3.17 a,b)* on obtient :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= [1 \quad x \quad y][A]^{-1}\{u\} \\ v(x,y) &= [1 \quad x \quad y][A]^{-1}\{v\} \end{aligned} \qquad (3.21\ a,b)$$

La multiplication des deux premières matrices du membre de droite produit une matrice, de dimension $1 \times n$, que l'on nomme matrice des fonctions de forme N_i. Dans le système, il y aura autant de fonctions de forme qu'il y a de nœuds. Pour un seul élément triangulaire, les trois termes de cette matrice peuvent être définis comme suit :

$$\begin{aligned} N_1 &= ((x_2y_3 - y_2x_3) + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2))/\det([A]) \\ N_2 &= ((x_3y_1 - y_3x_1) + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3))/\det([A]) \\ N_3 &= ((x_1y_2 - y_1x_2) + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1))/\det([A]) \end{aligned} \qquad (3.22\ a,b,c)$$

où le déterminant de [A] est égal à deux fois l'aire de l'élément triangulaire (annexe). Ces fonctions de forme ont la propriété de valoir $N_i = 1$ au nœud i et zéro aux deux autres nœuds de l'élément.

En combinant les déplacements en x et en y sous forme matricielle on obtient donc :

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad (3.23\ a)$$

$$\{U\} = [N]\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \qquad (3.23\ b)$$

En état plan de déformation, on permet la déformation en x et en y ainsi que le cisaillement dans le plan xy. Comme nous l'avons vu dans la section traitant de l'élasticité, les équations de déformation se résument à :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \qquad \textit{(3.24 a,b,c)}$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right)$$

Sous forme matricielle, les équations ***(3.24 a,b,c)*** peuvent s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [L]\{U\} \qquad \textit{(3.25 a,b)}$$

En insérant l'équation ***(3.23 b)*** dans l'équation précédente, on obtient :

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \qquad \textit{(3.26)}$$

En combinant les deux premiers termes de l'équation ***(3.26)*** sous forme de matrice [D] et en fixant le vecteur de déplacement des nœuds de l'élément sous forme de vecteur {d} on obtient :

$$\{\varepsilon\} = [D]\{d\} \qquad \textit{(3.27 a)}$$

où

$$[D]=\begin{bmatrix} N_{1x} & N_{2x} & N_{3x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{1y} & N_{2y} & N_{3y} \\ N_{1y} & N_{2y} & N_{3y} & N_{1x} & N_{2x} & N_{3x} \end{bmatrix} \qquad (3.27\,b)$$

Notons que les indices x et y, ajoutés aux symboles N_i, indiquent la dérivée partielle de N_i par rapport à x et y respectivement. On peut remarquer que les dérivées des fonctions de forme par rapport à x ou y correspondent aux éléments de l'inverse de la matrice [A]. Cette observation est particulièrement pertinente lors de la programmation.

Maintenant que les fonctions d'approximation du déplacement de chaque élément sont bien décrites, nous résolvons le système d'équations à l'aide des résidus pondérés.

3.2.3.3 Méthode des résidus pondérés

L'analyse par éléments finis à l'aide de la méthode des résidus pondérés requiert tout d'abord une approximation du déplacement par un polynôme à l'aide de fonctions de forme. L'erreur entraînée par cette approximation résulte en la formation d'un résidu qui est de plus en plus faible au fur et à mesure que la dimension des éléments diminue.

L'intégrale des résidus multipliée par une fonction de pondération permet de déterminer les meilleures solutions possibles. Le choix de la fonction de pondération peut se faire selon plusieurs critères. L'un des critères les plus connus est celui de Galerkin, puisqu'il conduit à une équation identique à celle que l'on obtient à l'aide des équations variationnelles classiques d'énergie (Gallagher, 1976; Grandin, 1986). Selon ce critère, la fonction de pondération est choisie comme étant la matrice des fonctions de forme. L'équation des résidus pondérés selon le critère de Galerkin s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} N_i(-\nabla(C\nabla U))d\Omega = 0 \tag{3.28}$$

Après une intégration par partie à l'aide de la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} (C\nabla U)\nabla N_i d\Omega - \int_{d\Omega} \bar{n}\cdot(C\nabla U)N_i = 0 \tag{3.29}$$

Notons que la première intégrale est appliquée sur le domaine Ω, alors que l'intégrale de surface est appliquée sur la frontière (dΩ) du domaine. Aussi, nous pouvons remarquer que l'intégration par partie génère des intégrales de surfaces qui permettent de réduire l'ordre du système et de faire intervenir les conditions aux frontières de force. Alors, si l'équation *(3.16)*, qui définit les conditions aux frontières de force, est incorporée dans l'équation précédente, on obtient :

$$\int_{\Omega} (C\nabla U)\nabla N_i d\Omega - \int_{d\Omega} gN_i = 0 \tag{3.30}$$

Maintenant, si la fonction d'approximation de déplacement *(3.23 b)* est appliquée dans l'équation *(3.30)*, on obtient :

$$\left(\int_{\Omega} (C\nabla N_i)\nabla N_i d\Omega\right)\{d\} = \int_{d\Omega} gN_i \tag{3.31 a}$$

Sachant que ∇N_i correspond à la matrice [D] de l'équation *(3.27b)*, on peut écrire :

$$\int_{\Omega} [D]^t[C][D]\{d\}d\Omega = \int_{d\Omega} [N_i]^t \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix} \tag{3.31 b}$$

Dans le terme de droite, {g} représente les forces de surface qui sont, dans notre cas appliquées dans la direction des y. Les termes de la matrice de fonctions de forme sont calculés à l'aide des équations *(3.22 a,b,c)* et l'intégration se fait entre les bornes d'application de la force. Lorsque le terme de droite est développé, on remarque que l'intégration sur un élément donne un vecteur équivalant à deux forces concentrées aux extrémité et de valeur égale à la moitié de {g} à condition que {g} soit constant sur cet élément (Grandin, 1986; Buchanan, 1995). Le terme de droite peut donc être exprimé sous forme de matrice :

$$[G] = \{g\}\frac{\|p_1 - p_2\|}{2} \tag{3.32}$$

où la norme représente la différence entre les positions (p_1 , p_2) des deux nœuds. Le développement de cette équation se trouve en annexe.

Maintenant, la matrice de rigidité locale peut être représentée par les trois premières matrices de l'équation *(3.31 b)* :

$$[k]_{locale} = \int_{vol} \left([D]^t [C] [D]\right) dV \tag{3.33}$$

Si on suppose une épaisseur unitaire, l'intégrale de volume se transforme en intégrale de surface. Étant donné que le produit D^t C D est constant à l'intérieur d'un élément et que la surface d'un élément est donné par (Grandin, 1986) :

$$\int dA = \frac{1}{2\left(\det[A]^{-1}\right)} \tag{3.34}$$

L'équation *(3.33)* devient :

$$[k]_{local} = \left([D]^T [C]\, [D]\right) \div \left(2 \det[A]^{-1}\right) \qquad (3.35)$$

La matrice [C] représente la matrice des constantes élastiques du matériau. En appliquant les équations *(3.32)* et *(3.35)* à l'équation *(3.31 b)*, on obtient finalement :

$$[k]_{locale}\{d\} = \{G\} \qquad (3.36)$$

Maintenant que les valeurs sont connues pour chaque élément du maillage, nous devons procéder à l'assemblage des matrices de rigidité locale en une seule matrice globale.

3.2.3.4 Assemblage de la matrice de rigidité

Le processus d'assemblage permet d'établir les liens entre les éléments de la structure. Chaque valeur d'une matrice locale est transférée et positionnée correctement dans la matrice globale de façon à additionner la contribution de tous les éléments qui partagent un nœud donné. Ainsi, suite à l'assemblage de la matrice de rigidité on obtient :

$$\{F\} = [K]\{U\} \qquad (3.37\ a)$$

$$\begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ \vdots \\ f_{nx} \\ f_{1y} \\ \vdots \\ f_{ny} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & k_{1,2n} \\ k_{2,1} & \vdots & & & & & k_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & k_{n,2n} \\ k_{n+1,1} & k_{n+1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & k_{n+1,2n} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ k_{2n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & k_{2n,2n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} \qquad (3.37\ b)$$

La matrice de rigidité globale [K] est une matrice carrée de dimension 2n × 2n, où 2 représente le nombre de degrés de liberté et n le nombre de nœuds de la structure. Les vecteurs {F} et {U} représentent respectivement les forces et les déplacements présents aux nœuds. Maintenant, avec l'application des conditions aux frontières et la connaissance de la rigidité du matériau étudié, il est possible de résoudre le problème direct et de déterminer le champ de déplacement associé à la perturbation (force ou déplacement) appliquée au spécimen.

3.2.3.5 Application des conditions aux frontières

La section précédente démontre bien que la construction de la matrice de rigidité locale ou globale nécessite la combinaison des équations constitutives capables de caractériser l'état mécanique d'un matériau avec les équations d'un corps en équilibre. Ainsi, les seuls paramètres requis pour le calcul de la matrice de rigidité globale sont, de façon générale, la position des nœuds, le module d'Young et le coefficient de poisson. L'application des conditions aux frontières permet, quant à elle, d'obtenir la solution unique du système.

Afin d'appliquer les conditions aux frontières du problème, la matrice globale doit tout d'abord avoir été assemblée. Ensuite, cette matrice de rigidité est réduite en matrice $[K_I]$ de façon à ne conserver que les équations dont les déplacements sont inconnus. Cette opération est effectuée en ne conservant que les lignes et les colonnes correspondant aux nœuds pour lesquels les déplacements ne sont pas imposés. On obtient donc le système d'équations suivant :

$$\{U_I\} = [K_I]^{-1}\{F_I\} \qquad \textit{(3.38)}$$

où $\{U_I\}$ représente le vecteur de déplacement recherché, $[K_I]$ la matrice de rigidité réduite et $\{F_I\}$ les forces associées aux nœuds pour lesquels aucun déplacement n'est appliqué. Ce vecteur $\{F_l\}$ est calculé différemment selon le cas où des conditions de force ou de déplacement sont appliquées.

Dans un cas où des conditions de Dirichlet sont appliquées sur toutes les frontières, le vecteur force est déterminé en multipliant la matrice de rigidité globale par le vecteur de déplacements imposés. Les forces résultant du déplacement imposé sont calculées à l'aide de $\{U_f\}$ qui représente le vecteur de déplacement imposé sur les frontières. Ainsi, il est possible de calculer un vecteur de force global de la façon suivante :

$$[K]\{U_f\}=\{F\}$$

Afin d'obtenir le vecteur force voulu $\{F_l\}$ à partir de $\{F\}$ calculé ci-haut, on ne conserve que les forces correspondant aux éléments autres que ceux des frontières pour lesquelles des conditions de Dirichlet ont été spécifiées.

Dans un cas de condition de Neumann, le vecteur force $\{F_l\}$ correspond tout simplement au vecteur de forces imposées pour lequel on retire les lignes correspondant aux nœuds où des conditions de Dirichlet sont appliquées.

Ensuite, le vecteur de déplacement de la structure entière est déterminé en multipliant le vecteur $\{U_l\}$ par une matrice de connectivité [B] et en lui additionnant le vecteur de déplacements imposés $\{u_d\}$. Il apparaît clairement ici que les conditions de déplacement (conditions essentielles) sont pleinement satisfaites.

$$\{U\}=[B]\{U_l\}+\{u_d\} \tag{3.39}$$

Maintenant, notons que pour le cas où la perturbation externe est effectuée à l'aide des conditions de Dirichlet, il est nécessaire d'ajouter une matrice de pénalité à la matrice d'assemblage. Dans un cas de condition de Neumann, il est possible d'ajouter une matrice [Q] capable de représenter une couche de matériau (située à la surface) dont la rigidité est connue.

Bref, la méthode des éléments finis nous permet de déterminer les déplacements de toute la structure interne d'un spécimen, à condition de connaître les conditions aux frontières ainsi que les propriétés du matériau. Comme nous l'avons mentionné plus haut, la méthode des éléments finis sera utilisée à deux fins distinctes : simuler le déplacement expérimental et déterminer le déplacement du modèle nécessaire à la résolution du problème inverse.

En mécanique, il est possible d'effectuer une analyse structurelle, soit à l'aide d'une méthode analytique ou d'une méthode numérique. Une méthode numérique possible est la résolution par éléments finis. Comme nous avons pu le voir dans les pages précédente, cette méthode permet une analyse précise de structures complexes et est reconnue pour être très flexible. Il est aussi possible de décrire le comportement mécanique du tissu mou en compression à l'aide d'un modèle analytique. Nous verrons, dans le prochain chapitre, que ces méthodes analytiques sont généralement réservées pour des cas de structures très simples mais que leur résultats peuvent être utilisés pour comparer les résultats obtenus à l'aide d'une méthode numérique.

3.3 Modèles analytiques

Même s'il existe plusieurs modèles analytiques pour décrire le comportement mécanique d'un cas typique d'élasticité, seulement deux modèles sont développés et étudiés dans ce mémoire. Le premier modèle, qui est dérivé du travail de Saada (1989), permet de développer des expressions mathématiques décrivant la distribution de contrainte en fonction de la grosseur du compresseur et des propriétés associées à un matériau homogène, isotrope et semi-infini. Le deuxième modèle analytique étudié est basé sur le travail de Saada (1989) et permet de décrire le comportement d'un problème d'élasticité

2D pour un cas d'inclusion circulaire homogène enfouie dans un matériau homogène et infini.

Ainsi, le premier modèle analytique étudié est basé sur le travail de Ponnekanti *et al.* (1992) qui ont développé un modèle analytique afin de déterminer la distribution de contrainte axiale d'un corps élastique, homogène, isotrope et semi-infini compris entre deux compresseurs circulaires. En se basant sur l'équation de Saada (1989), Ponnekanti *et al.* (1992) ont utilisé le principe de superposition afin de déterminer la contrainte non uniforme. Dans ce modèle analytique, la déformation due aux deux compresseurs se définit comme suit :

$$\sigma(z)=\sigma_1(z)+\sigma_2(d-z) \tag{3.40}$$

où $\sigma_1(z)$ et $\sigma_2(d\text{-}z)$ représentent les composantes de déformations dues aux compresseurs 1 et 2 respectivement, à une profondeur z donnée d'un spécimen d'épaisseur d.

L'équation de base du modèle est :

$$\sigma_1(z)=\sigma_1(0)\left[\frac{1}{\left(1+a^2/z^2\right)^{1.5}}-1\right] \tag{3.41}$$

où a et z représentent respectivement le rayon du compresseur et la position de la région étudiée le long de l'axe de compression; $\sigma_1(0)$ correspond à la contrainte uniforme appliquée à la face du compresseur à $z = 0$.

L'effet du deuxième compresseur est introduit de la façon suivante :

$$\sigma_2(d-z)=\sigma_2(d)\left[\frac{1}{\left[1+a_2^2/(d-z)^2\right]^{1.5}}-1\right] \tag{3.42a}$$

$$\sigma_2(d)=\frac{A_1}{A_2}\sigma_1(0) \tag{3.42b}$$

où $\sigma_2(d-z)$ est la composante de contrainte due au deuxième compresseur à une profondeur donnée alors que A_1 et A_2 représentent l'aire du premier et du deuxième compresseur. Notons que, puisque nous avons supposé un matériau élastique, la contrainte et la déformation sont directement proportionnelles; par conséquent, les équations ci-dessus sont aussi valables pour les déformations. Ce modèle de superposition de contrainte due aux deux compresseurs décrit bien la contrainte non uniforme présente dans les cas expérimentaux.

Comme il a été dit plus haut, le modèle est efficace pour un cas de matériau homogène et infini. En élastographie, ces hypothèses ne sont pas vérifiées et sont responsables, selon Ponnekanti *et al.* (1995), de la réduction de contraste retrouvée sur l'élastogramme. Konofagou *et al.* (1996) ont toutefois démontré que l'hypothèse d'un arrière-plan infini dans la direction latérale est valable pour un cas où le rapport entre la dimension du spécimen et celui du compresseur est égal ou supérieur à quatre.

Le deuxième modèle étudié est celui basé sur le travail de Saada (1989). Ce modèle, qui a récemment été utilisé par Kallel *et al.* (1996c), permet d'étudier le cas d'une inclusion enfouie dans un milieu homogène. Grâce à l'utilisation des potentiels complexes décrit en détail dans Honein (1990), il est possible de déterminer le déplacement à l'intérieur de l'inclusion ainsi qu'à l'arrière-plan.

$$u_r^I = -\frac{Tr}{8\mu_I}\left\{\beta_0(\kappa_I - 1) + \left[\frac{\gamma_0(\kappa_I - 3)}{a^2}r^2 + 2\delta_0\right]\cos 2\theta\right\} \tag{3.43}$$

$$u_r^{AP} = -\frac{T}{8\mu_{AP}r}\left\{(\kappa_{AP} - 1)r^2 + 2\gamma a^2 + \left[\beta(\kappa_{AP} + 1)a^2 + 2r^2 + \frac{2\delta a^4}{r^2}\right]\cos 2\theta\right\} \tag{3.44}$$

La description des constantes associées à ces équations est fournie en annexe.

Afin de comparer les résultats obtenus par la méthode des éléments finis avec ceux obtenus par ce modèle analytique, une ligne au centre d'une image de déformation a été extraite et tracée (figure 3.3) pour chacun des modèles.

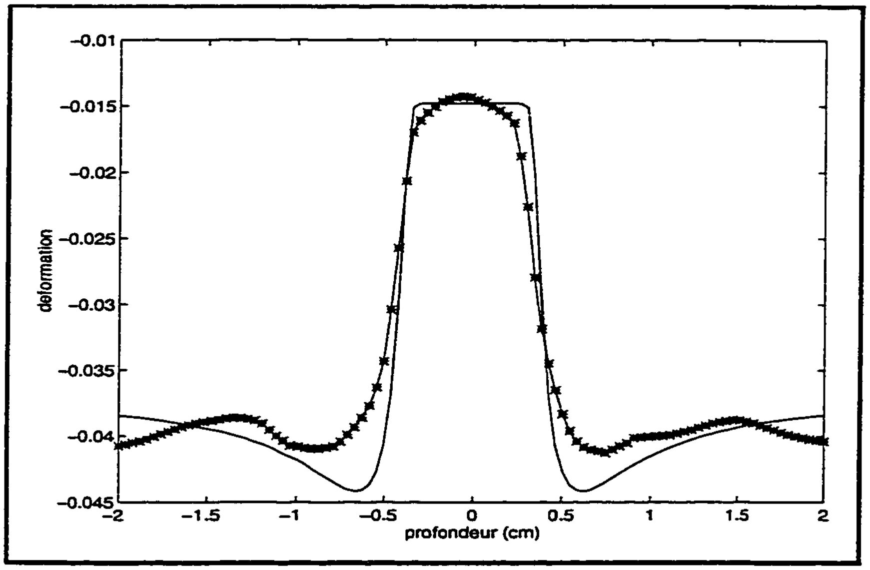


Figure 3.3 : Profil de déformation au centre d'un spécimen.
(***) : méthode des éléments finis; (—) : méthode analytique. Notons que plus le nombre d'éléments augmente dans le maillage d'éléments finis plus les résultats s'approchent de la méthode analytique.

La figure 3.3 valide en quelque sorte le modèle par éléments finis puisque les courbes démontrent que les résultats de déformations sont comparables pour les deux méthodes.

Cette conclusion confirme d'ailleurs les travaux de Kallel *et al.* (1996c), puisque ces auteurs ont observé un comportement très similaire entre les résultats prédits par le modèle analytique et ceux obtenus par éléments finis. Ces similarités ont été observées à l'aide d'un graphique d'efficacité de transfert de contraste qui permet de comparer le contraste observé sur l'élastogramme par rapport au vrai contraste. D'ailleurs, cette notion de transfert de contraste sera aussi utilisée dans ce mémoire afin de vérifier l'effet des conditions aux frontières dans la résolution du problème inverse. La prochaine section décrit donc en détail les principes de base de cette notion.

3.4 L'efficacité de transfert de contraste

La notion d'efficacité de transfert de contraste (ETC) permet de déterminer si le contraste entre l'inclusion et l'arrière-plan obtenu sur l'image de déformation ou de rigidité est comparable à ce que l'on devrait observer. Ponnekanti *et al.* (1995) et Kallel *et al.* (1996c) définissent le contraste comme le rapport de la moyenne de la déformation de l'arrière-plan (ε_{yy}^{AP}) sur celle de l'inclusion (ε_{yy}^{I}) pour un cas où l'observation se fait sur un élastogramme conventionnel, alors que pour un cas de résolution du problème inverse, le contraste observé correspond au rapport de la rigidité de l'inclusion (E_I) sur celle de l'arrière-plan (E_{AP}) :

$$\frac{1}{C_o} = \frac{\varepsilon_{yy}^{I}}{\varepsilon_{yy}^{AP}} = \frac{E_{AP}}{E_I} \qquad \textit{(3.45)}$$

où C_o représente le contraste observé. Les indices « yy » associés au terme de déformation indiquent la direction de propagation de l'onde. Notons que le contraste observé peut provenir de trois sources distinctes : d'une image de déformation, d'une image de rigidité *(3.45)* ou d'un modèle analytique.

En effet, en utilisant la notion de potentiel complexe, il est possible de démontrer analytiquement (Kallel *et al.* 1996c) que la déformation à l'intérieur de l'inclusion (ε_{yy}^{I}) et de l'arrière-plan (ε_{yy}^{AP}) peut être représentée par :

$$\varepsilon_{yy}^{I} = \left[\frac{(1-2\nu)(1-\nu)}{2\mu_I + \mu_{AP}(2-4\nu)} + \frac{(1-\nu)}{\mu_{AP} + \mu_I(3-4\nu)}\right]T \tag{3.46a}$$

$$\varepsilon_{yy}^{AP} = \frac{1-\nu}{2\mu_{AP}}T \tag{3.46b}$$

où ν représente le coefficient de Poisson, alors que μ_I et μ_{AP} représentent respectivement le module de cisaillement de l'inclusion et de l'arrière-plan et T la compression appliquée au spécimen.

En incorporant ces deux équations dans l'équation *(3.45)*, la prédiction du contraste observé sur l'élastogramme peut être décrite par :

$$\frac{1}{C_0} = \left[\frac{(1-2\nu)}{C_t + (1-2\nu)} + \frac{2}{1 + C_t(3-4\nu)}\right] \tag{3.47a}$$

où

$$C_t = \frac{\mu_I}{\mu_{AP}} = \frac{E_I}{E_{AP}} \tag{3.47b}$$

Idéalement, le contraste observé devrait être équivalent au contraste réel (C_t). Puisque l'ETC représente le rapport du contraste observé par rapport au vrai contraste, on peut écrire :

$$\mathrm{ETC} = \frac{C_0}{C_t} \qquad \textit{(3.48)}$$

où C_o peut provenir des trois sources énumérées plus haut. Si l'efficacité est exprimée en décibel, on obtient :

$$\mathrm{ETC} = 20\mathrm{Log}\left(\frac{C_0}{C_t}\right) \qquad \textit{(3.49a)}$$

$$\mathrm{ETC}_{(\mathrm{dB})} = C_{0(\mathrm{dB})} - C_{t(\mathrm{dB})} \qquad \textit{(3.49b)}$$

Grâce à cette notion d'efficacité de transfert de contraste, les résultats prédits par le modèle analytique peuvent être comparés à ceux obtenus sur un élastogramme simulé. De plus, l'ETC nous permettra de comparer le contraste observé sur l'élastogramme conventionnel (image de déformation) à celui obtenu sur une image de rigidité (résolution du problème inverse). Examinons tout d'abord l'ETC d'un élastogramme conventionnel obtenu à partir de données simulées.

La figure 3.4 montre l'efficacité de transfert de contraste ($\mathrm{ETC}_{(\mathrm{dB})}$) en fonction de différents types d'inclusions ($C_{t\ (\mathrm{dB})}$). Comme nous l'avons vu à l'équation ***(3.47b)***, C_t indique le rapport entre la rigidité de l'inclusion et celle de l'arrière-plan. Étant donné que les valeurs sur l'abscisse sont exprimées en décibel, les inclusions molles sont associées aux valeurs négatives de C_t, alors que les inclusions plus dures que l'arrière-plan sont représentées par les valeurs positives de C_t.

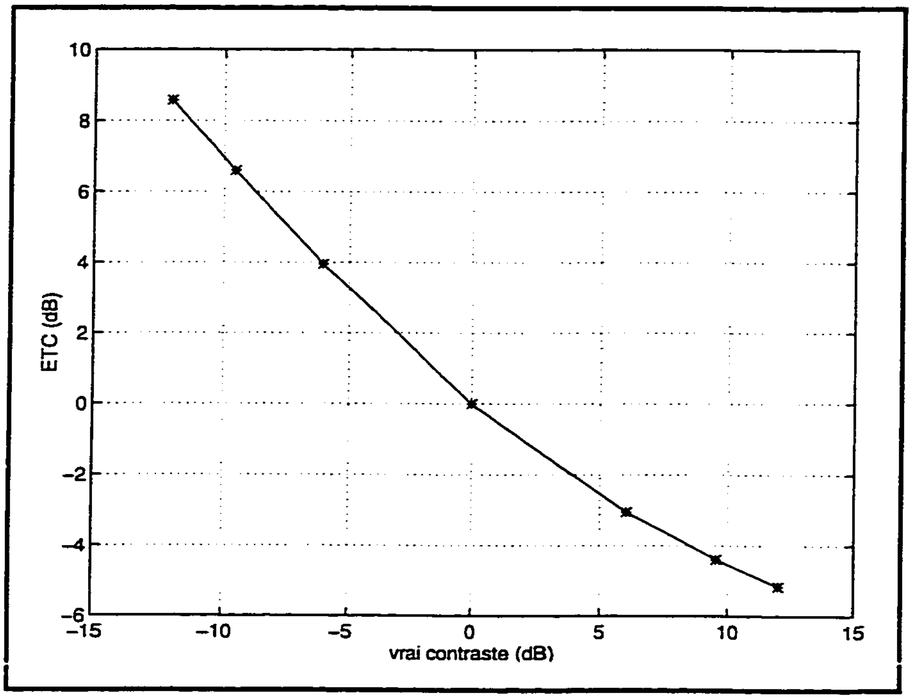


Figure 3.4 : Courbe d'efficacité de transfert de contraste en fonction du vrai contraste.
Courbe obtenue à partir d'un élastogramme conventionnel pour un cas de données simulées, dans des conditions de glissement pur pour une déformation de 5 %.

Idéalement, le contraste observé sur l'élastogramme devrait être identique au contraste réel de module, et la courbe de l'ETC (figure 3.4) devrait être une droite horizontale à 0dB. Sachant qu'un bon transfert de contraste signifie que la détection des inclusions se fait efficacement sur l'image observée, nous remarquons sur la figure 4.4 que le transfert de contraste est meilleur pour les inclusions dures que pour les inclusions molles. En effet, pour des C_t positifs, la pente est de plus en plus faible et semble converger vers une valeur autour de –6 dB. Pour les inclusions molles, l'efficacité diminue puisque la pente augmente et les valeurs de l'ETC s'éloignent de plus en plus du 0 dB. Ces résultats concordent avec les travaux de Kallel *et al.* (1996c), puisque le modèle avait prédit certaines difficultés de transfert de contraste dans des cas d'inclusions molles.

Nous remarquons aussi que pour un cas d'inclusion dure ($Ct_{(dB)}>0$), l'ETC est négative, alors que pour un cas d'inclusion molle ($Ct_{(dB)}<0$) l'ETC est positive. Afin de faciliter la lecture de l'efficacité de transfert de contraste, on peut transformer les valeurs positives en valeurs négatives. Ainsi, en prenant les valeurs absolues de chacun des termes de l'équation *(3.49b)*, les résultats sont normalisés par rapport à 0 dB (Kallel *et al.*, 1996c) et, tant que la valeur du contraste observé ($C_{o(dB)}$) est inférieure au contraste réel $C_{t(dB)}$, l'ETC demeure négative peu importe le type d'inclusions et la valeur maximale d'efficacité est à 0 dB.

$$ETC = \left|C_{0(dB)}\right| - \left|C_{t(dB)}\right| \qquad (3.50)$$

La figure 3.5 représente la courbe normalisée de la figure 3.4 ainsi que les résultats obtenus pour un cas analytique.

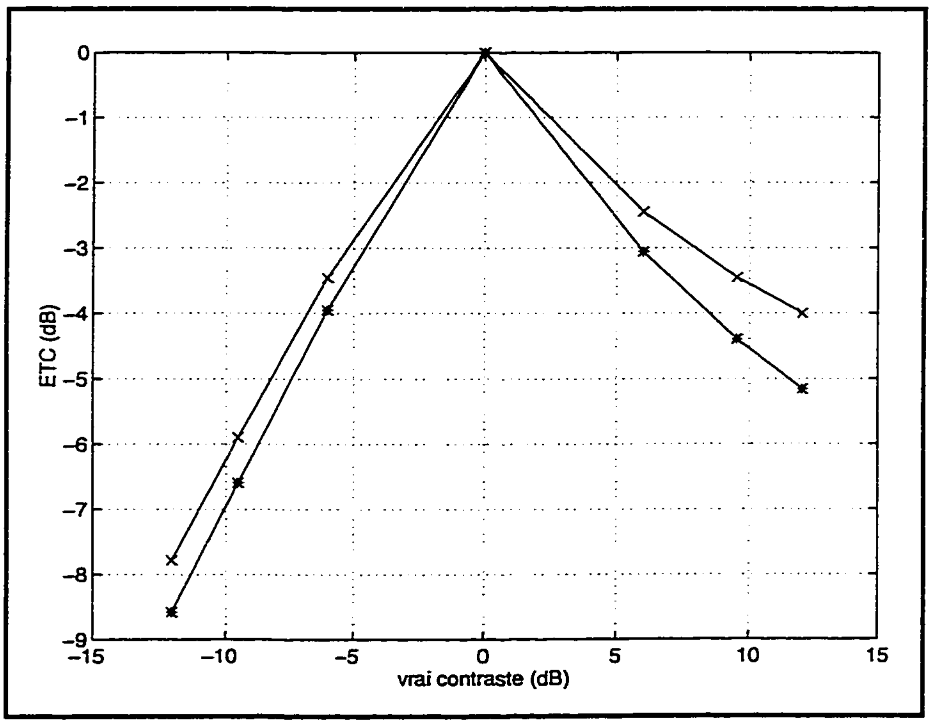


Figure 3.5 : Courbes d'ETC normalisées par rapport à 0dB.
Courbes d'ETC obtenues pour un cas (***) d'élastogramme conventionnel simulé dans des conditions de glissement pur et dans un cas (xxx) de prédiction analytique.

La figure 3.5 montre bien que, pour des conditions de glissement pur, le modèle analytique est très près des résultats simulés obtenus à l'aide des éléments finis. D'ailleurs, cette courbe démontre un peu plus clairement la difficulté de détection des inclusions molles par rapport aux inclusions dures.

Comme nous l'avons exposé dans la revue de littérature, l'image de déformation comporte plusieurs artefacts qui nuisent à la détection. Ces artefacts peuvent découler du fait que le modèle mécanique est grandement simplifié et que l'image de déformation est interprétée comme une relation directe de la rigidité. Ces simplifications entraînent des artefacts comme le durcissement de la structure et une ETC limitée surtout dans les cas d'inclusions molles. Dans le prochain chapitre, nous verrons que ces erreurs peuvent être minimisées de façon récursive en résolvant le problème inverse.

4 Théorie sur la résolution du PI en élastographie

Le but ultime de la résolution du problème inverse (PI) est de déterminer la rigidité qui représente le mieux le champ de déplacement interne obtenu expérimentalement à l'aide du système ultrasonore ou par simulation. Ce problème d'optimisation se résout à l'aide de la méthode des moindres carrés qui permet de minimiser l'erreur entre le champ de déplacement estimé et le champ de déplacement expérimental. Notons que le champ de déplacement estimé est déterminé par la solution des équations d'élasticité et l'application des conditions aux frontières. Ces équations d'élasticité sont elles-mêmes résolues numériquement en utilisant la méthode des éléments finis. La résolution du problème inverse par la méthode de perturbation implique un processus itératif grâce auquel la rigidité de tous les éléments du maillage est ajustée à l'aide de petites variations (ΔE). Ainsi, l'estimation de rigidité à l'itération k+1 est représentée par l'estimation de la rigidité de l'itération précédente à laquelle on ajoute un ajustement ΔE afin de s'approcher du champ de rigidité recherché.

$$E_{k+1} = E_k + \Delta E \qquad \textit{(4.1)}$$

La figure 4.1 montre bien que le champ de déplacement expérimental (U_{exp}) peut être obtenu par corrélation entre les signaux pré et postcompression ou par simulation[4]. Dans un cas de simulation, on construit un spécimen en lui attribuant une rigidité connue pour ensuite appliquer les forces de compression et résoudre le problème direct (PD). La résolution du problème direct consiste à déterminer les déplacements de tous les points d'une structure, sachant la rigidité de cette dernière et les forces appliquées au système. Ensuite, à l'aide de la résolution par éléments finis, il est possible d'obtenir un champ de déplacement expérimental idéal et sans bruit.

---

[4] À moins d'indication contraire, nous utiliserons un champ de déplacement expérimental simulé.

Une fois le déplacement expérimental calculé, la résolution du problème inverse (PI) peut commencer. La résolution du PI consiste à déterminer la rigidité d'une structure en connaissant les déplacements résultant de la force de compression connue. Ce processus débute avec une première estimation du champ de rigidité (E_{est}) du tissu qui est souvent approximé par un milieu homogène. Avec cette estimation de rigidité, il est possible de résoudre le PD afin d'obtenir une première estimation du champ de déplacement. La différence (du), entre les champs de déplacement estimé et expérimental, permet de calculer une valeur d'ajustement (ΔE) à ajouter au vecteur de rigidité (E_k), de façon à obtenir une nouvelle estimation de rigidité (E_{k+1}). Ce processus d'ajustement est répété jusqu'à ce que la différence entre les champs de déplacement soit la plus faible possible.

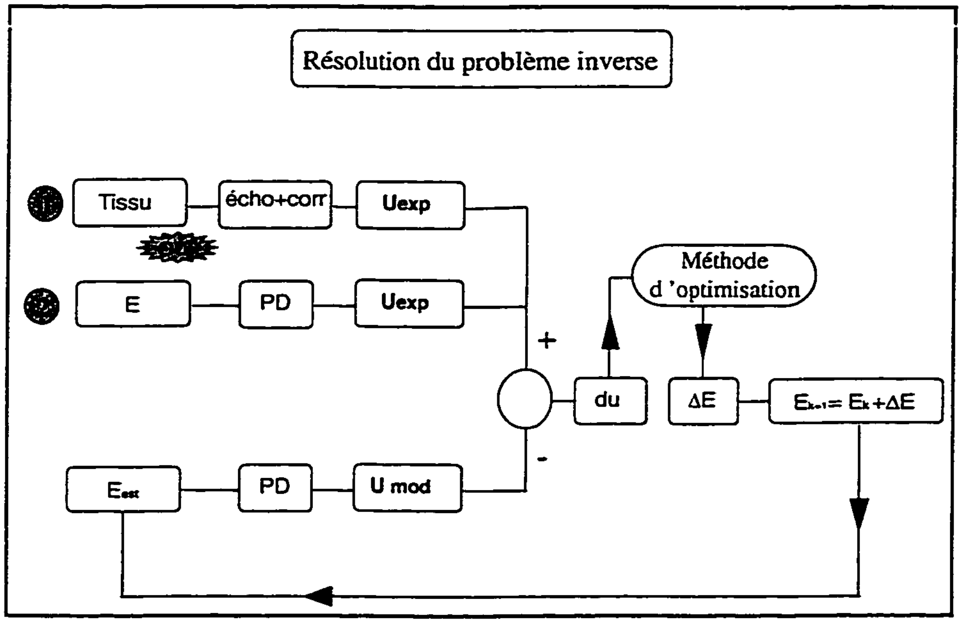


Figure 4.1 : La résolution du problème inverse à l'aide de la méthode des perturbations. U_{exp} : champ de déplacement expérimental observé; U_{mod} : champ de déplacement estimé par le modèle; du : différence entre le champ de déplacement estimé et expérimental; ΔE : vecteur de correction de rigidité; E_{est} : estimation de la rigidité à l'aide du modèle.

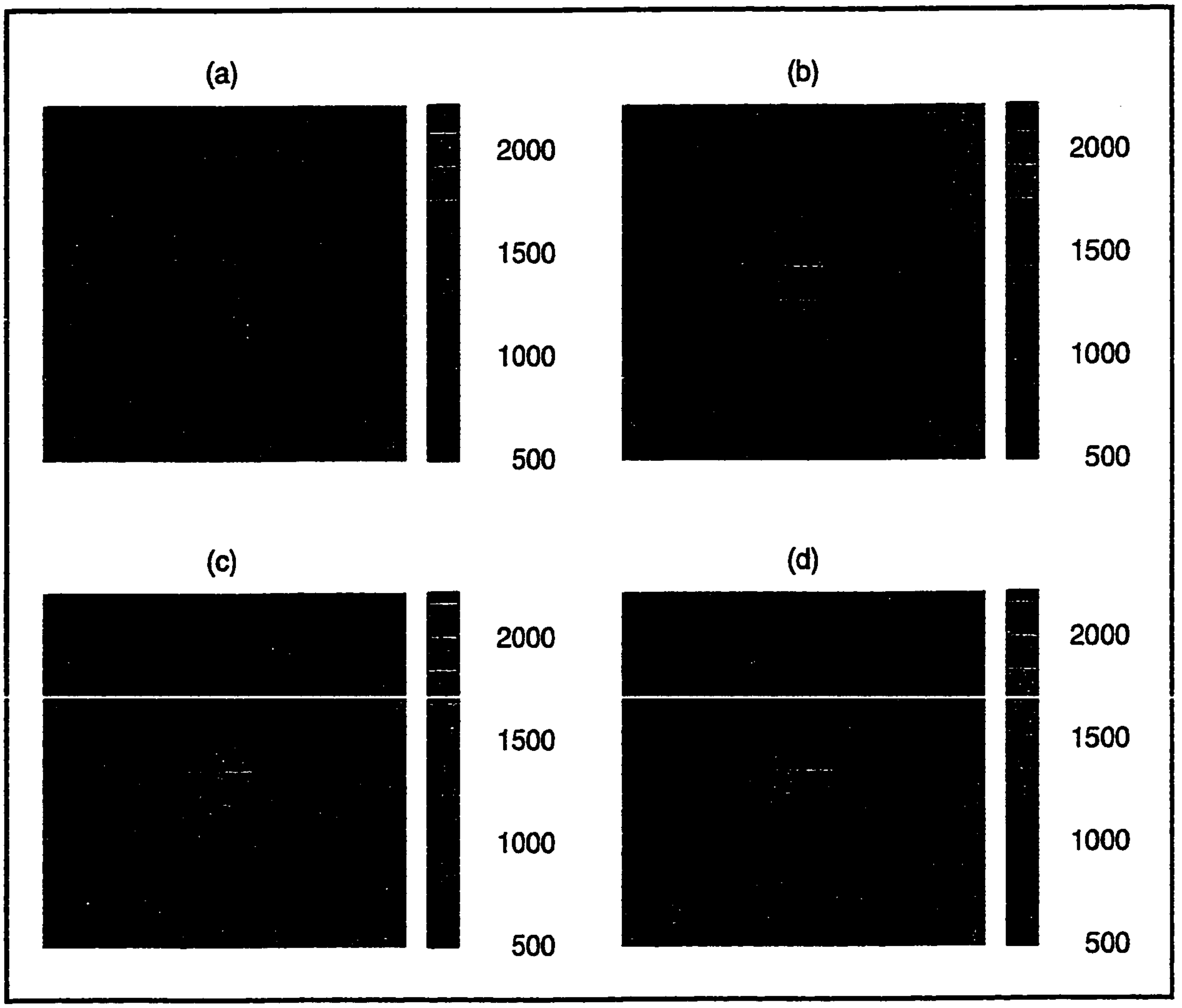


Figure 4.2 : Reconstruction à partir d'un champ de déplacement simulé.
Image de rigidité obtenue pour un cas d'inclusion dure après (a) 2 itérations, (b) 6 itérations, (c) 15 itérations et (d) 30 itérations. Notons que la reconstruction à été effectuée à l'aide des déplacements axiales seulement.

La figure 4.2, qui représente les résultats obtenus après 2, 6, 15 et 30 itérations, montre bien la convergence vers la solution ainsi que la minimisation de l'erreur entre les champs de déplacement estimé et expérimental. Après 2 itérations dans des conditions idéales, il est possible de détecter la masse malgré la sous-estimation de l'inclusion. Entre six et quinze itérations, il est possible de remarquer que le bruit autour de l'inclusion s'atténue et la détection peut être faite plus clairement. Finalement, entre les itérations quinze et trente, les images restent relativement stables et on donc considérer que l'algorithme a convergé.

Mathématiquement, l'estimation de la rigidité ($\hat{E}$) par la minimisation de la fonction objective ($\Phi(E)$) représentée par l'erreur des moindres carrés, peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\hat{E} = \mathrm{ArgMin}\{\Phi(E)\} \qquad \textit{(4.2a)}$$

$$\text{où} \quad \Phi(E) = \frac{1}{2}\left\{\left\| f(E) - U_t \right\|^2\right\} \qquad \textit{(4.2b)}$$

$f(\bar{E})$ et U_t représentent respectivement le champ de déplacement estimé à l'aide du modèle et le champ de déplacement mesuré à partir d'images échographiques ou d'images simulées. L'équation de la fonction objective ***(4.2b)*** peut aussi s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\Phi(E) = \frac{1}{2}\left(f(E) - U_t\right)^T \left(f(E) - U_t\right) \qquad \textit{(4.3)}$$

Il existe plusieurs méthodes d'optimisation capables de minimiser cette équation. La méthode du gradient, la méthode de Gauss-Newton régularisée, la méthode de Levenberg-Marquardt et la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée en sont des exemples et constituent l'ensemble des processus d'optimisation utilisés dans ce travail.

4.1 Les méthodes d'optimisation

4.1.1 Méthode du gradient

Le gradient indique la direction pour laquelle la fonction objective augmente le plus rapidement et est représenté par :

$$g = \frac{\partial \Phi}{\partial E} = \left(\frac{f(E)}{\partial E} \right)^T \left(f(E) - U_t \right) \qquad \textbf{\textit{(4.4)}}$$

Comme on veut minimiser la fonction objective, on utilise la direction opposée à son gradient. De plus, un facteur λ est ajouté de manière à contrôler la longueur du pas qui est effectué dans cette direction. L'ajustement à ajouter au champ de rigidité est alors donné par :

$$\Delta E = -\lambda g \qquad \textbf{\textit{(4.5)}}$$

où λ est le pas, g le gradient de la fonction objective présenté à l'équation ***(4.4)*** et ΔE la correction à apporter à la rigidité à chaque itération. Il est nécessaire de contrôler la grandeur du pas une fois que la direction du vecteur de correction a été établie (Marquardt, 1963). Ces deux paramètres (direction et pas) ne peuvent donc pas être déterminés simultanément.

La méthode du gradient est particulièrement efficace pour déterminer la direction de la solution, mais une fois près de la solution, cette méthode perd toute son efficacité et la convergence devient impossible ou très lente (Branham, 1990). En effet, cette méthode très simple n'est pas recommandée dans la majorité des cas puisqu'elle converge très lentement, particulièrement lorsque la fonction objective est mal conditionnée (Marquardt, 1963). Par contre, la méthode du gradient est surtout valable lorsqu'elle est combinée à d'autres méthodes.

4.1.2 Gauss-Newton

Une autre façon de déterminer le minimum de la fonction objective (Φ(E)) est de dériver la fonction et de la poser égale à zéro.

$$\Phi'(\mathrm{E}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{E}} = 0 \tag{4.5}$$

Puisque Φ'(E) est une fonction non linéaire de E, on décompose cette expression en série de Taylor. Sachant que la série de Taylor se définit comme suit :

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1!} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

on peut conserver les termes linéaires du développement en série de Taylor de la dérivée de la fonction objective pour obtenir l'équation suivante :

$$\Phi'(E) = \Phi'_k + \Delta E \Phi''_k = 0 \tag{4.6}$$

Notons ici que le dérivée seconde de la fonction objective se nomme *matrice hessienne*. Maintenant, puisque ΔE représente le terme que nous désirons déterminer, l'équation peut s'écrire :

$$\Delta E = [\Phi''_k]^{-1} \Phi'_k \tag{4.7}$$

Le développement mathématique des dérivées première et seconde de la fonction objective s'exprime ainsi :

$$\Phi' = (\mathrm{f}'(\mathrm{E}))^{\mathrm{T}} (\mathrm{f}(\mathrm{E}) - \mathrm{U}_t) \tag{4.8}$$

$$\Phi'' = \left(f''(E)\right)^T \left(f(E) - U_t\right) + \left(f'(E)\right)^T \left(f'(E)\right) \qquad \textbf{\textit{(4.9)}}$$

Puisqu'il n'est pas nécessaire d'obtenir la valeur de la matrice hessienne (Φ'') avec une grande précision[5], le premier terme de la dérivée seconde de la fonction objective ***(4.9)*** peut être négligé (Tarantola, 1987; Fletcher, 1980). D'ailleurs, la méthode de base de Newton se transforme en méthode de Gauss-Newton lorsque la matrice hessienne est approximée par le deuxième terme de l'expression ***(4.9)*** (Fletcher, 1980).

Si les équations ***(4.8)*** et ***(4.9)*** sont introduites dans l'équation ***(4.7)*** on obtient :

$$\Delta E = \left[f'(E)^T f'(E)\right]^{-1} \left(f'(E)^T \left(f(E) - U_t\right)\right) \qquad \textbf{\textit{(4.10a)}}$$

En posant que

$$f'(E) = \frac{\partial U}{\partial E} = S \qquad \textbf{\textit{(4.10b)}}$$

où S représente la *matrice de sensibilité*, on peut écrire l'équation ***(4.10a)*** sous forme plus compacte :

$$\Delta E = \left[S^T S\right]^{-1} S^T \left(f(E) - U_t\right) \qquad \textbf{\textit{(4.11)}}$$

La méthode de Gauss-Newton est extrêmement efficace pour les cas où l'approximation initiale est bonne (Branham, 1990). Avec une mauvaise estimation initiale, la convergence est impossible et, de façon typique, les changements sur le module se font

---

[5] Le terme hessien n'a pas besoin d'être connu avec une grande précision puisque plus on s'approche de la solution, plus le champ de déplacement estimé s'approche de celui mesuré et le premier terme de l'équation ***(4.9)*** tend vers zéro.

aléatoirement d'une itération à l'autre (Murray, 1972). Notons aussi que la convergence dépend de la structure et du conditionnement du terme hessien (S^TS) à inverser dans l'équation *(4.11)*. Dans un système linéaire bien conditionné, de petites erreurs ou perturbations dans les données ont très peu d'effet sur la solution tandis que dans un système mal conditionné, l'effet sur la solution est très grande (Kreyszig, 1993; Cook *et al.*, 1989). Une matrice mal conditionnée entraîne donc des problèmes de solution instable lors de son inversion. L'introduction de la régularisation λ dans l'inversion de la matrice hessienne *(4.12)* s'avère donc essentielle afin d'assurer un bon conditionnement de la matrice :

$$\Delta E = \left[S^T S + \lambda I\right]^{-1} S^T \left(f(E) - U_t\right) \qquad \textit{(4.12)}$$

Dans cette méthode, tout comme dans le cas de la méthode du gradient, la grandeur du pas est fixée après la détermination de la direction (Marquardt, 1963). Il existe plusieurs méthodes pour déterminer la meilleure valeur de λ. Celle qui sera exploitée dans le présent travail est la méthode de validation croisée généralisée (VCG).

4.1.2.1 Méthode de validation croisée généralisée

L'estimation de λ par la méthode de validation croisée généralisée (VCG) consiste à trouver une valeur de λ capable de minimiser l'équation suivante (Golub *et al.*, 1979; Wahba, 1985) :

$$V(\lambda) = \left(\frac{0.5nP^T P}{\left((1/n)\, trace\left(I - SA_\lambda\right)\right)^2} \right) \qquad \textit{(4.13)}$$

où n représente le nombre de points à évaluer. Dans notre cas, ce paramètre représente le nombre de nœuds de la structure multiplié par le nombre de degrés de liberté. P et A_λ sont définis comme suit :

$$A_\lambda = \left[S^T S + \lambda I\right]^{-1} S^T$$

$$P = \left(I - SA_\lambda\right) du$$

Ce calcul est fait pour un certain champ de valeur de λ. De plus, à chaque itération, la valeur du λ optimal est recalculée. La figure 4.3 représente une courbe typique de la VCG pour différentes valeurs de λ obtenues à une itération donnée.

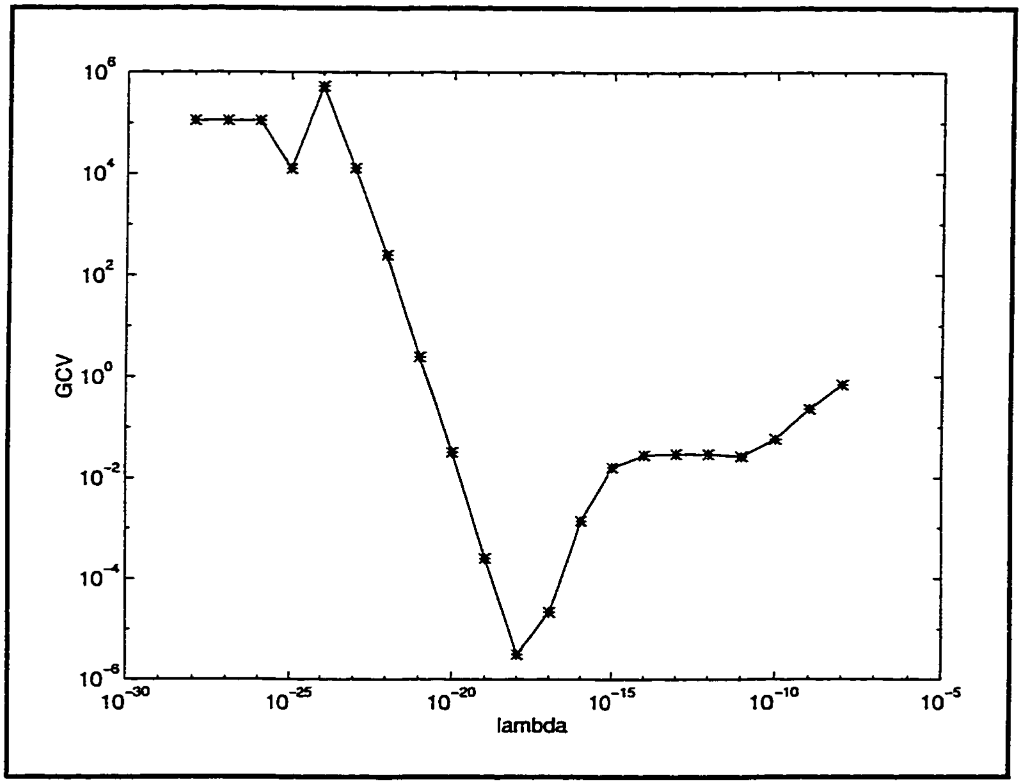


Figure 4.3 : Validation croisée généralisée.
Le lambda déterminé par la méthode est celui qui correspond à la valeur la plus faible de V(λ).

4.1.3 Levenberg-Marquardt

Marquardt (1963) propose une façon d'éliminer le problème de mauvais conditionnement rencontré avec la méthode de Gauss-Newton non régularisée en effectuant une interpolation optimale entre la méthode de développement en série de Taylor (Gauss-Newton) et la méthode du gradient. La méthode de Levenberg-Marquardt est particulièrement robuste et efficace pour un problème de moindres carrés non linéaire (Fletcher, 1980). L'équation de base qui gouverne la méthode de Levenberg-Marquardt est représentée par :

$$[B + \lambda I]\Delta E = g \qquad \textit{(4.14)}$$

où g représente le gradient et peut donc être développé sous la forme présentée à l'équation *(4.4)*, I représente la matrice identité et B représente la matrice hessienne (S^TS). Afin d'obtenir un minimum global, on doit s'assurer que le terme ($B + \lambda I$) est positif défini (Marquardt, 1963; Murray, 1972; Fletcher, 1980). Le paramètre λ représente le compromis entre les deux méthodes citées plus haut. En effet, on peut remarquer que lorsque lambda est très petit, on s'approche de la méthode de Gauss-Newton, alors que lorsque lambda est élevé, la méthode est comparable à une approximation de la méthode du gradient.

La boucle d'itération débute donc avec une valeur arbitraire de λ assez élevée (10^{-2}) et, au fur et à mesure que la valeur obtenue s'approche de la solution, le λ diminue (Branham, 1990). Les premières itérations sont donc faites avec une méthode qui approche la méthode du gradient et celle-ci est particulièrement efficace pour trouver la direction de la solution lorsqu'on est loin de la solution. Les itérations finales sont, pour leur part, faites avec un processus qui est dominé par la méthode de Gauss-Newton (λ faible). Comme nous avons vu plus tôt, la méthode de Gauss-Newton est particulièrement efficace une fois près de la solution.

Il est donc clair que la méthode de Levenberg-Marquardt combine la méthode de Gauss-Newton et celle du gradient de façon à bénéficier des avantages des deux méthodes sans trop souffrir de leurs désavantages. Le choix du paramètre λ doit se faire de façon stratégique puisque c'est la valeur de ce paramètre qui régit le compromis entre la méthode de Gauss-Newton et la méthode du gradient. C'est pour cette raison que la détermination du paramètre λ fait partie intégrante de la méthode de Levenberg-Marquardt; le choix du paramètre constitue d'ailleurs un facteur important et décisif pour l'efficacité de la méthode.

4.1.3.1 Choix du paramètre λ

La fonction objective $\Phi(E)$ à minimiser est calculée pour λ et λ/ν à chaque itération. Le choix de ν est arbitraire, mais Marquardt (1963) affirme que $\nu=10$ est généralement une valeur adéquate. À chaque itération, la fonction objective $\Phi(E)$ doit être minimisée de façon à obtenir une valeur plus faible à l'itération r+1 qu'à l'itération r :

$$\Phi_{r+1} < \Phi_r$$

La figure 4.4 représente les critères de sélection du λ pour la méthode de Levenberg-Marquardt. Dans cette figure, $\Phi(r)$ représente la valeur de la fonction objective calculée à l'aide du champ de déplacement U_r. À l'initialisation, le U_r provient du calcul fait à l'aide de l'estimation initiale de la rigidité. La fonction objective $\Phi(r-1)$ est calculée à l'aide du champ de déplacement obtenu avec le λ de l'itération précédente. Finalement, $\Phi(r-1/\nu)$ représente la fonction objective calculée à l'aide du champ de déplacement obtenu avec (λ_{r-1}/ν) qui représente le λ de l'itération précédente diminué d'un facteur 10.

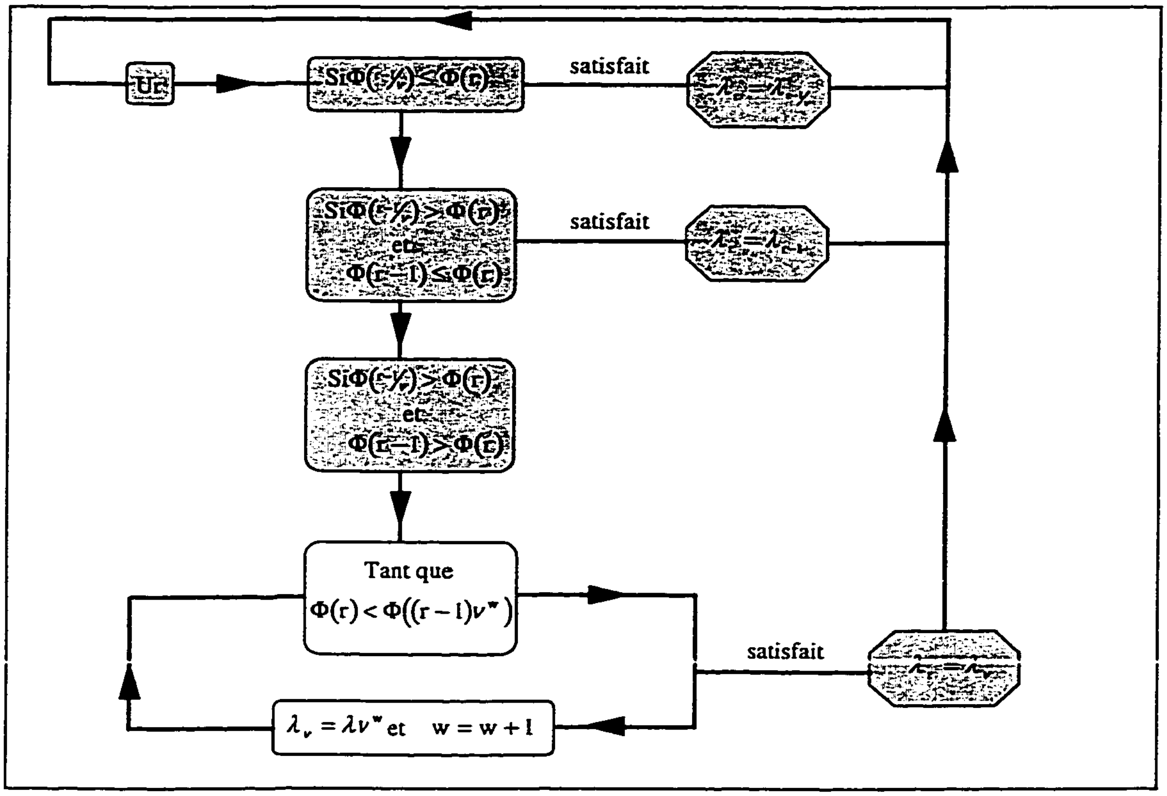


Figure 4.4 : Critères de Levenberg-Marquardt.

Notons aussi que, grâce à la troisième condition, on obtient toujours la plus petite valeur de λ pour laquelle la décomposition en série de Taylor donne une bonne approximation.

4.1.3.2 Normalisation des paramètres

Lors de la mise en oeuvre de l'algorithme de Levenberg-Marquardt, on doit normaliser les paramètres B, G et ΔE de l'équation *(4.14)* par les valeurs de la matrice hessienne (S^TS). Ce choix de normalisation transforme la matrice B en une simple matrice de coefficient de corrélation. Cette mise à l'échelle permet d'ailleurs de pouvoir débuter les itérations avec un λ identique peu importe le type de problème que l'on envisage de résoudre. Dans les équations suivantes, les paramètres dotés d'un astérisque représentent les paramètres normalisés :

$$B^* = \frac{B_{ij}}{\left(B_{ii} B_{jj}\right)^{1/2}} \tag{4.15a}$$

$$g^* = \frac{g}{\left(B_{jj}\right)^{1/2}} \tag{4.15b}$$

Ainsi, à l'itération r on obtient :

$$\left(B^{*(r)} + \lambda^{(r)} I\right) \Delta E^{*(r)} = g^{*(r)} \tag{4.16}$$

Ensuite, afin d'obtenir le ΔE non normalisé, on doit faire la transformation suivante :

$$\Delta E^{(r)} = \frac{\Delta E_{jj}^{*(r)}}{\left(B_{jj}\right)^{1/2}} \tag{4.17}$$

4.1.4 Levenberg-Marquardt modifiée

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, la méthode de Levenberg-Marquardt utilise un paramètre (λI) de compromis entre la méthode du gradient et celle de Gauss-Newton. La matrice identité de ce paramètre de compromis peut aussi être interprétée comme une matrice de covariance normalisée présente dans un estimateur MAP. La matrice de covariance traduit donc la corrélation qui existe entre les différents éléments du vecteur E. Lorsqu'on utilise une matrice identité, on suppose qu'il n'existe aucun lien entre les différentes valeurs, et les éléments sont traités indépendamment les uns des autres. Ainsi, en développant la formule de l'estimateur MAP (annexe), on obtient l'équation suivante :

$$\Delta E = \left[S^T R_b^{-1} S + \lambda R_E^{-1} \right]^{-1} S^T R_b^{-1} dU \tag{4.18}$$

où R_b^{-1} et R_E^{-1} représentent respectivement la corrélation entre les éléments du vecteur de déplacement et du vecteur de rigidité. Dans notre cas, R_b^{-1} équivaut à la matrice identité, puisqu'aucune information *a priori* n'a été ajoutée sur le vecteur de déplacement.

La modification majeure apportée à la méthode de Levenberg-Marquardt est donc l'utilisation d'une matrice de corrélation appliquée sur les modules des différents éléments qui forment le maillage. L'information *a priori* ajoutée sur le vecteur de module à l'aide de R_E^{-1} est une distribution gaussienne centrée sur chaque triangle. Ainsi, l'influence de cette matrice de corrélation se traduit par le fait que la valeur d'un triangle influence celle des autres éléments qui l'entourent :

$$[R_E] = \exp\left(-\frac{(D-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \tag{4.19a}$$

où D peut être développé comme suit :

$$[D] = \sum_{e=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \sqrt{(x_e - x_i)^2 + (y_e - y_i)^2} \tag{4.19b}$$

où *m* représente le nombre d'éléments du domaine, x_e et x_i représentent les coordonnées en x du centre de masse des triangles *e* et *i* respectivement, alors que y_e et y_i représentent les coordonnées en y du centre de masse des triangles *e* et *i* respectivement. Chaque colonne de la matrice [D] représente la distance du centre de masse d'un élément par rapport au centre de masse de tous les autres éléments. Pour le cas étudié, la gaussienne est de moyenne (μ) nulle et d'écart-type (σ) variant selon la grosseur des éléments du maillage utilisé et du degré de lissage que l'on désire obtenir.

Puisque l'équation *(4.19a)* est calculée pour tous les éléments du maillage, la distribution gaussienne peut être représentée par une matrice $[R_E]$ où chaque colonne représente l'influence d'un élément sur les autres. Donc, pour un maillage donné, plus l'écart-type est faible, plus la matrice de corrélation se rapproche de la matrice identité puisque, dans ce cas, l'influence d'un élément sur un autre élément est tellement faible qu'il peut être considéré indépendant ou de corrélation nulle.

De façon générale, la méthode de Levenberg-Marquardt utilise des λ plus élevés au départ et des λ plus faibles à la fin. Ceci est particulièrement important dans les dernières itérations lorsqu'on s'approche de la solution, puisque la décomposition en série de Taylor est généralement une bonne approximation. En modifiant la méthode de Levenberg-Marquardt en utilisant une matrice de corrélation au lieu d'une matrice identité, on obtient un résultat lissé où les composantes du bruit sont atténuées. Nous verrons d'ailleurs au chapitre 6 que la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée est la méthode la mieux adaptée à notre type de problème.

4.2 Calcul de la matrice de sensibilité

Peu importe la méthode choisie (gradient, Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt ou Levenberg-Marquardt modifiée) pour résoudre le problème inverse, le terme de la dérivée du champ de déplacement estimé ($f'(E)$) est un terme qui doit être calculé. Comme nous l'avons vu à l'équation *(4.10b)*, ce terme est appelé matrice de sensibilité. Cette matrice est construite colonne par colonne à l'aide de la résolution du problème direct.

Nous savons, grâce à l'équation *(3.37a)*, que la résolution par éléments finis du problème direct nous permet de déterminer le champ de déplacement à l'aide de la relation suivante :

$$[K]\{U\}=\{F\}$$

où [K] est la matrice de rigidité globale, {U} est un vecteur colonne désignant les déplacements nodaux et {F}, les forces appliquées.

En dérivant l'équation précédente par rapport à E_j (module d'Young de l'élément j), on obtient :

$$\left[\frac{\partial K}{\partial E_j}\right]\{U\}+[K]\frac{\partial U}{\partial E_j}=\frac{\partial F}{\partial E_j} \qquad \textit{(4.20)}$$

En supposant qu'on applique comme conditions aux frontières une force externe, on trouve :

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{E_j}}=-[\mathrm{K}]^{-1}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \mathrm{E_j}}\{\mathrm{U}\}=\mathrm{S_j} \qquad \textit{(4.21)}$$

Cette équation représente la j^e colonne de la matrice de sensibilité. On doit donc répéter ce processus pour tous les éléments de la structure afin de construire une matrice de sensibilité $2n\times m$ où n représente le nombre de nœuds et m, le nombre d'éléments. Notons que l'équation *(4.21)* construit la matrice de sensibilité pour un problème d'élastographie dans un cas de force imposée[6]. Par contre, expérimentalement, le montage est construit de façon à ce que le problème soit dirigé en déplacement contrôlé.

Dans Kallel *et al.* (1996a), une formulation différente de l'équation de la matrice de sensibilité est exposée. En effet, afin de s'adapter à un cas de déplacement contrôlé, un terme de pénalité a été ajouté à l'équation *(4.21)*. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, l'introduction d'une matrice de pénalité dans le système équivaut à insérer des ressorts très rigides entre le compresseur et la frontière inférieure de façon à ce que ceux-ci soient en parallèle avec le tissu. Ainsi, la force appliquée, nécessaire pour provoquer un déplacement donné, sera principalement déterminée par la constante du ressort et très peu par les propriétés élastiques du tissu sous le compresseur (Kallel *et al.*, 1996a). Alors, en incorporant le terme de pénalité on obtient :

$$\left[K+K^{p}\right]\{U\}=\{F\}+\left[K^{p}\right]\{U^{0}\} \qquad \textit{(4.22)}$$

où $\{U^0\}$ est un vecteur contenant le déplacement des nœuds sous le compresseur. La matrice de pénalité est une matrice diagonale qui contient les paramètres de pénalité γ_p aux endroits correspondant à la position des nœuds où un déplacement non nul est imposé. Notons que la valeur de γ_p doit être choisie de façon à ce que les valeurs non nulles du produit $[K^p]\{U\}$ soient beaucoup plus grandes que celles du produit $[K]\{U\}$. Ensuite, si le même développement que pour un cas de force contrôlée est utilisé, la matrice de sensibilité peut être calculée à l'aide de l'équation suivante :

$$S^{(j)}=\frac{\partial U}{\partial E_j}=-\left[[K]+\left[K^{p}\right]\right]^{-1}\left[\frac{\partial K}{\partial E_j}\right]\left[[K]+\left[K^{p}\right]\right]^{-1}\left[K^{p}\right]\{U^{0}\} \qquad .\textit{(4.23)}$$

---

[6] À moins d'indication contraire, nous utiliserons des conditions de forces dans la résolution du problème inverse.

Bref, Kallel *et al.* (1996b) ont démontré que la résolution du problème inverse permet d'éliminer des artefacts de reconstruction et de repousser les limites rencontrées dans un contexte d'efficacité du transfert de contraste. Les auteurs remarquent d'ailleurs qu'il est parfois inadéquat de considérer l'image de déformation comme le reflet de la distribution relative du module d'élasticité, puisque l'étude d'un élastogramme entaché d'artefacts peut entraîner une mauvaise interprétation de l'image.

4.3 Élimination des modules négatifs

La méthode de perturbation, utilisée pour résoudre le problème inverse, peut entraîner l'apparition de modules négatifs pour certains éléments du maillage. Étant donné qu'une rigidité négative n'a aucun sens physique, nous devons, à chaque itération, les détecter et les éliminer. L'élimination de ces modules négatifs se fait en ajoutant un gain (α) à l'équation *(4.1)*, de façon à obtenir (Gagnon, 1997) :

$$E_{k+1} = E_k + \alpha \Delta E_k \tag{4.24}$$

Au début de chaque itération, le gain est fixé à un. Ensuite, pour une itération donnée, tant qu'il y a détection de modules négatifs, α est réduit d'un facteur deux. Ce processus a comme conséquence de réduire le pas de tous les éléments de la structure, tout en conservant la direction générale de convergence.

4.4 Résumé de l'algorithme de résolution du problème inverse

Afin d'initialiser le système, il est nécessaire de faire une supposition sur la rigidité de la structure. Grâce au calcul de la matrice de rigidité locale ***(4.35)*** et à son assemblage, il est possible d'obtenir la matrice [K] correspondant à la matrice de rigidité globale. Ensuite, la résolution du problème direct, effectuée avec l'équation ***(4.37a),*** permet d'estimer les déplacements aux nœuds de tous les éléments du domaine. Cette estimation du champ de déplacement est donc comparée au champ de déplacement expérimental et, tant que l'erreur entre ces deux champs n'est pas plus faible qu'un seuil donné, le processus continu.

Maintenant, avec les paramètres [K] et $U_{modèle}$, le calcul de la matrice de sensibilité peut être fait à l'aide de l'équation *(4.21)* ou *(4.23)* selon le cas. La variation de rigidité (ΔE), qu'on doit ajouter au vecteur de rigidité estimée, peut être calculée à l'aide de l'équation *(4.18)* dans un cas où la méthode de d'optimisation choisie est celle de Levenberg-Marquardt modifiée. Autrement, pour utiliser la méthode du gradient, de Gauss-Newton de Levenberg-Marquardt, on doit utiliser l'équation *(4.5)*, *(4.11)* ou *(4.14)* respectivement. Connaissant cette variation de rigidité, l'équation *(4.24)* peut être résolue et la nouvelle estimation de rigidité permet de débuter une autre itération.

Cet algorithme, qui constitue le canevas du projet, permet de déterminer l'effet des incertitudes associées aux conditions aux frontières dans la résolution du problème inverse en élastographie.

Dans le cadre de l'étude de l'effet d'une erreur sur les conditions aux frontières, le problème inverse sera résolu à l'aide d'une méthode hybride. Cette méthode correspond à la méthode de perturbation (figure 4.1) à laquelle on ajoute des conditions aux frontières qui sont différentes pour le modèle et pour les simulations expérimentales.

5 Définition du projet

5.1 *Méthodologie*

Dans tout travail qui comprend l'utilisation d'un modèle, il est primordial de s'assurer que toutes les hypothèses utilisées pour construire ce modèle décrivent bien le comportement mécanique du matériau en question. Alors, afin de vérifier la validité de notre modèle, on procédera à une comparaison entre les résultats de déformation obtenus à l'aide de notre modèle et ceux obtenus analytiquement.

Ensuite, pour déterminer la méthode d'optimisation la plus adéquate à notre type de problème, nous utiliserons la notion d'efficacité de transfert de contraste (ETC). Ainsi, en comparant les courbes d'ETC pour les méthodes de Gauss-Newton, de Levenberg-Marquardt et de Levenberg-Marquardt modifiée, nous serons en mesure de déterminer laquelle de ces méthodes est la meilleure.

Finalement, afin d'atteindre notre objectif principal qui est d'évaluer l'effet des conditions aux frontières dans la résolution du problème inverse, nous effectuerons une *reconstruction hybride* (figure 5.1). Ce type de reconstruction représente le cas où la reconstruction du champ de déplacement est effectuée à l'aide d'un modèle où les conditions aux frontières sont différentes de celles utilisées expérimentalement.

Sur la figure 5.1, on peut voir qu'il est possible d'obtenir un champ de déplacement expérimental par corrélation entre les signaux pré et postcompression ou par simulation. Les simulations nous laissent un parfait contrôle sur les paramètres impliqués dans le système et nous permettent aussi d'obtenir un champ de déplacement sans bruit. Étant donné que ces conditions sont idéales pour vérifier l'effet de la variation d'un paramètre, nous utiliserons un champ de déplacement expérimental simulé pour notre étude.

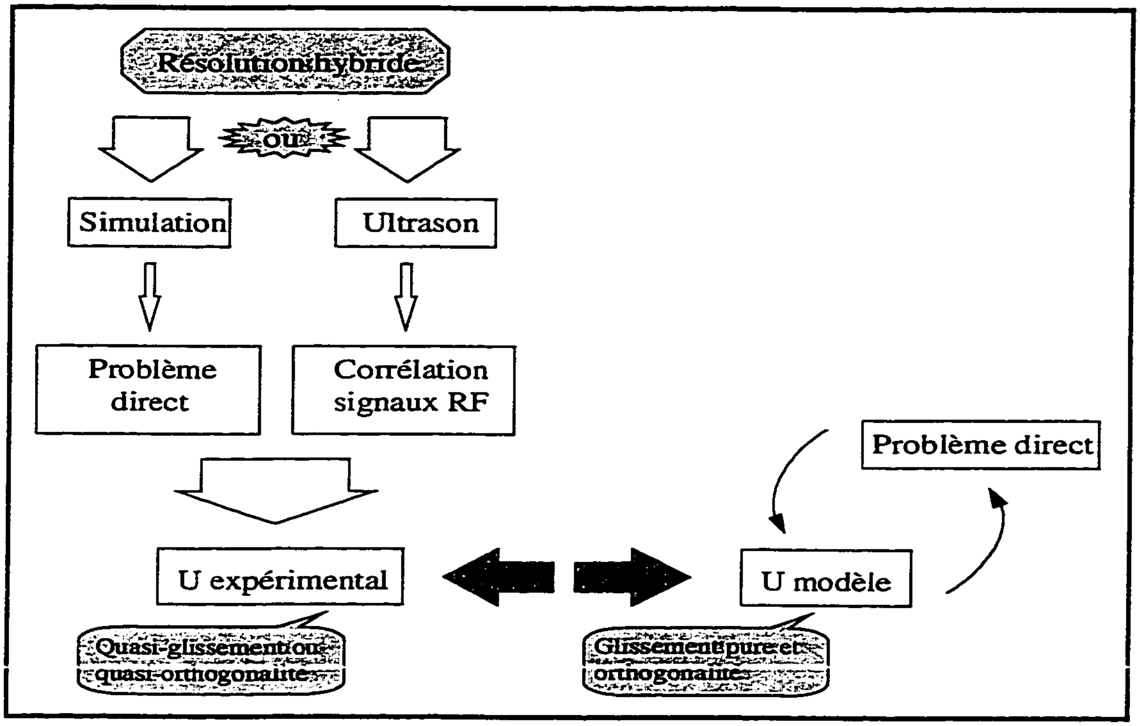


Figure 5.1 : Résumé de la méthodologie du travail.
Le champ de déplacement expérimental (U expérimental) correspond à des conditions de quasi-glissement ou de quasi-orthogonalité; le champ de déplacement du modèle (U modèle) correspond à des conditions de glissement pur et d'orthogonalité.

Comme il est indiqué sur la figure 5.1, les conditions aux frontières du modèle nécessaires à la résolution du problème inverse sont caractérisées par des conditions de glissement pur sur les surfaces supérieure et inférieure et par des conditions de direction d'application de la force parfaitement orthogonale. Il est également possible de constater que les conditions aux frontières des simulations expérimentales sont associées à des conditions de quasi-glissement ou de quasi-orthogonalité. Notons que les effets d'une incertitude sur ces deux paramètres dans la résolution du problème inverse sont étudiés de façon indépendante.

Ainsi, la résolution du problème direct avec des conditions aux frontières de quasi-glissement (figure 5.2) permettra de simuler le frottement possible à l'interface peau/compresseur et d'obtenir le champ de déplacement expérimental ($U_{expérimental}$). Les forces latérales, représentées par **f** sur la figure 5.2, sont des forces réparties sur toute la surface du compresseur et de la table d'appui. Ensuite, le champ de déplacement estimé par le modèle ($U_{modèle}$) est déterminé à l'aide de conditions de glissement pur. Ces conditions nous permettront de résoudre le problème inverse hybride. Ainsi, la résolution du problème inverse hybride de glissement consiste à résoudre ce système à l'aide de la méthode des perturbations décrite au chapitre 4, mais pour laquelle les conditions aux frontières de glissement pour le modèle et pour les simulations expérimentales ne sont pas les mêmes.

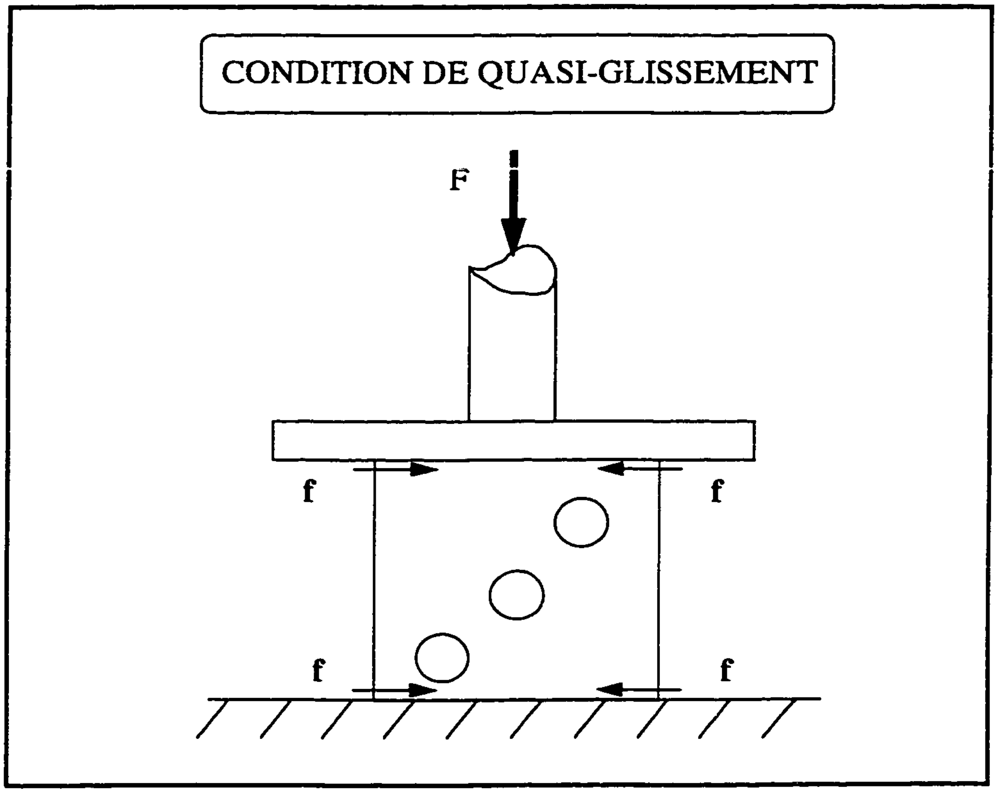


Figure 5.2 : Condition de quasi-glissement.
F : force de compression ; f : force de frottement.

L'application des conditions de glissement et de non-glissement sur un spécimen résulte en deux morphologies différentes. La figure 5.3 expose l'allure générale d'un spécimen après une compression avec des conditions de glissement pur et des conditions de non-glissement.

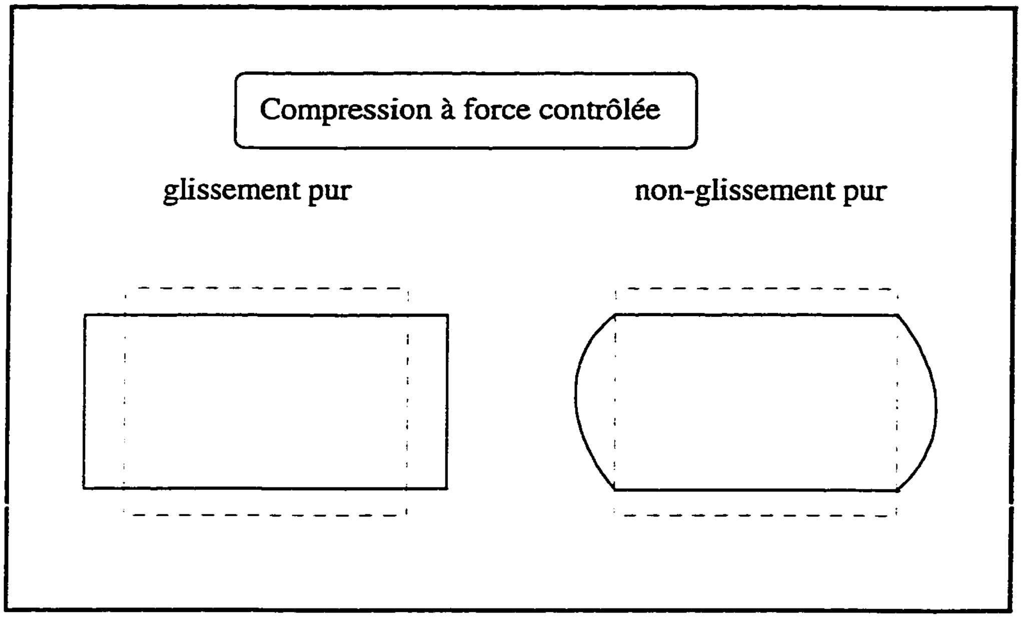


Figure 5.3 : Allure d'un spécimen en compression pour un cas de conditions de glissement et de non-glissement pur.
(------) représente l'allure du spécimen avant compression, alors que (——) représente l'allure du spécimen après la compression.

Pour ce qui est de l'étude de l'effet d'une erreur sur la direction d'application de la force, nous utiliserons le même principe de résolution hybride. Ainsi, le champ de déplacement du modèle ($U_{modèle}$) provient d'un cas où la direction d'application de la force est parfaitement perpendiculaire à la surface supérieure du spécimen, alors que le champ de déplacement expérimental ($U_{expérimental}$) se construit à l'aide d'une force qui n'est pas perpendiculaire (quasi orthogonale) à la surface du spécimen. Ces conditions différentes pour le modèle et les simulations expérimentales permettent de résoudre de problème inverse hybride dans la direction d'application de la force.

Les résultats obtenus pour différents degrés d'erreurs seront évalués à l'aide des courbes d'ETC. Ainsi, il sera possible d'étudier les répercussions de différents degrés d'erreurs des conditions aux frontières sur l'image de rigidité. Notons que le même processus sera suivi pour l'étude de l'effet d'une erreur sur la direction d'application de la force et pour l'effet d'une erreur sur les conditions de glissement. Pour l'étude des conditions de glissement, des situations présentant jusqu'à 40 % d'erreur seront étudiées. Pour ce qui est de l'étude de la direction d'application de la force de compression, des situations présentant jusqu'à 20 % d'erreur seront étudiées. Notons aussi que les reconstructions hybride de glissement ou d'orthogonalité impliquent l'utilisation du déplacement axial seulement.

Pour terminer, des tests préliminaires comprenant la résolution du problème inverse à l'aide d'un maillage non adapté permettra de confirmer la possibilité de l'application de cette méthode à des cas cliniques. Un maillage non adapté consiste en un maillage dont tous les éléments ont environ la même superficie. Ainsi, le maillage non adapté n'est pas raffiné autour des inclusions, ce qui théoriquement rend la reconstruction plus difficile. Pour la réalisation des tests préliminaires, les simulations expérimentales sont effectuées avec des maillages adaptés très raffinés afin d'obtenir un champ de déplacement expérimental assez précis. Le champ de déplacement du modèle est, quant à lui, obtenu à l'aide d'un maillage structuré dont tous les éléments sont de la même grosseur. Cette situation permet donc de simuler les cas cliniques pour lesquels il nous est impossible d'utiliser un maillage adapté pour le modèle puisque la position de l'inclusion est inconnue.

5.1.1 Calcul du pourcentage d'erreur sur les conditions aux frontières

Afin d'examiner l'effet d'une erreur sur les conditions aux frontières, la résolution hybride a été faite avec différents pourcentages d'erreur sur les conditions de glissement à l'interface tissu/compresseur. Dans un cas d'état plan de déformation, pour un matériau élastique, incompressible et isotrope, il est possible de calculer la déformation latérale due au coefficient de Poisson. En effet, étant donné que, dans ce cas, la déformation latérale vaut la moitié de celle obtenue axialement, il est possible de calculer et d'appliquer des force latérales à l'interface de façon à obtenir des conditions de non-glissement. Par exemple, l'application d'une force de 50 N/m dans la direction axiale nécessite l'application d'une force de 25 N/m sur les frontières dans la direction latérale afin d'obtenir des conditions de non-glissement à l'interface tissu/compresseur. Si la résolution du problème inverse se fait avec des conditions de glissement pur pour le modèle et des conditions de non-glissement pur pour les données expérimentales, la résolution hybride se fait avec 100 % d'erreur sur les conditions aux frontières. Sachant que les conditions aux frontières du modèle sont toujours associées à des conditions de glissement pur et que les valeurs des forces latérales peuvent varier, le pourcentage d'erreur (Er) sur les conditions aux frontières se calcule de la façon suivante :

$$\mathrm{Er} = \left[1 - \left(\frac{F_s - F_a}{F_s}\right)\right]100 \qquad \textit{(5.1)}$$

où F_s indique la force nécessaire pour avoir un non-glissement pur et F_a indique la force appliquée latéralement sur le spécimen à l'interface tissu/compresseur.

Pour ce qui est de l'étude d'une erreur sur l'angle d'application de la force axiale, le principe de résolution hybride est le même. Ainsi, sachant que le modèle suppose toujours une direction d'application de la force parfaitement perpendiculaire à la surface du spécimen, le pourcentage d'erreur (E_d) sur ce paramètre se calcule de la façon suivante :

$$E_d = \left(\frac{A_m - A_a}{A_m}\right)100 \qquad \textit{(5.2)}$$

où A_m correspond à l'angle compris entre la direction d'application de la force et la surface du spécimen (90°) pour le cas du modèle et A_a correspond à ce même angle (de 90° à 70°) dans le cas de simulation.

5.2 Matériel

Tous les essais ont été effectués avec le spécimen présenté à la figure 5.4. Le coin inférieur gauche du fantôme représente le point de coordonnée (0,0). Le diamètre (D) vaut 7 mm alors que la hauteur (H) et la largeur (L) valent 40 mm.

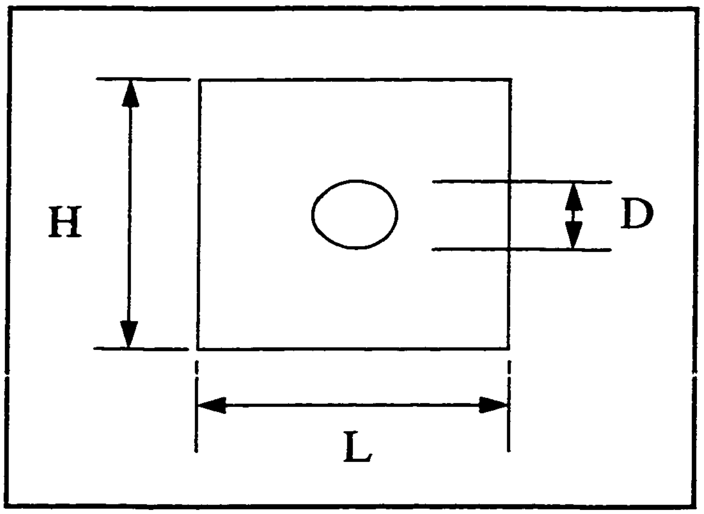


Figure 5.4 : Le fantôme des simulations expérimentales.
Fantôme utilisé pour les cas simulés. H : hauteur du spécimen ; L : largeur du spécimen ; D : diamètre de l'inclusion.

L'arrière-plan et les inclusions sont considérés homogènes, élastiques et isotropes. Le coefficient de Poisson et la densité sont fixés à 0,499 et 1,04 g/cc respectivement. De plus, les lésions sont considérées liées à l'arrière-plan, ce qui signifie que les déplacements et les contraintes sont continus à l'interface lésion/arrière-plan.

Les forces appliquées correspondent à des forces de 50N/m appliquées sur toute la surface supérieure et inférieure du spécimen, et le diamètre du compresseur a une dimension infinie. Ces forces entraînent une déformation générale du spécimen d'environ 4 %. La rigidité de l'arrière-plan est de 1 kPa et celle de l'inclusion varie entre des valeurs quatre fois plus molles et quatre fois plus rigides que l'arrière-plan.

6 Résultats

Cette partie du mémoire résume les résultats qui ont pu être tirés du travail fait sur les simulations. La première partie des résultats démontre l'effet des incertitudes sur les conditions aux frontières lors de la résolution du problème inverse effectuée avec différentes méthodes d'optimisation. L'analyse de ces résultats permet de choisir la méthode la plus performante qui sera conservée tout au long de l'étude. Ensuite, une évaluation de l'effet de l'application des conditions de glissement partiel sur les images de déformation et de rigidité permettra de mieux comprendre le comportement du système dans un cas de résolution hybride de glissement. Notons que la même évaluation est effectuée pour un cas de direction d'application de force de compression non orthogonale à la surface du spécimen. Ensuite, une étude de l'effet de la résolution hybride sur les images de rigidité permet de mieux comprendre les comportements observés sur les courbes d'ETC tracées en fonction de différents contrastes. Aussi, l'obtention des courbes d'ETC tracées en fonction de divers pourcentages d'erreur sur les conditions aux frontières permet d'évaluer jusqu'à quel point il est possible de faire une erreur sur les conditions aux frontières avant que l'ETC soit affectée. Pour terminer, des résultats préliminaires d'une résolution du problème inverse effectuée à l'aide d'un maillage non adapté permettent de vérifier l'application de la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée à des cas non simulés.

6.1 Effet d'une incertitude sur les conditions aux frontières dans la résolution du problème inverse

Comme il a été mentionné au chapitre 4, trois méthodes d'optimisation nécessaires à la résolution du problème ont été étudiées. Ces trois méthodes sont : la méthode de Gauss-Newton régularisée, la méthode de Levenberg-Marquardt ainsi que la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée. Le comportement de ces trois méthodes a été étudié pour des cas de résolution du PI hybride et des cas de résolution du PI ordinaire. Notons que la résolution du PI ordinaire correspond à un cas où les conditions aux frontières du modèle sont les mêmes que celles trouvées expérimentalement, alors que pour le cas de la résolution du PI hybride, les conditions aux frontières sont différentes pour le modèle et les simulation expérimentales.

Dans un cas de résolution du problème inverse ordinaire, les méthodes de Levenberg-Marquardt et de Gauss-Newton donnent des résultats similaires sur l'image de rigidité. La figure 6.1 représente les résultats d'ETC pour un cas de glissement pur en fonction de différents contrastes.

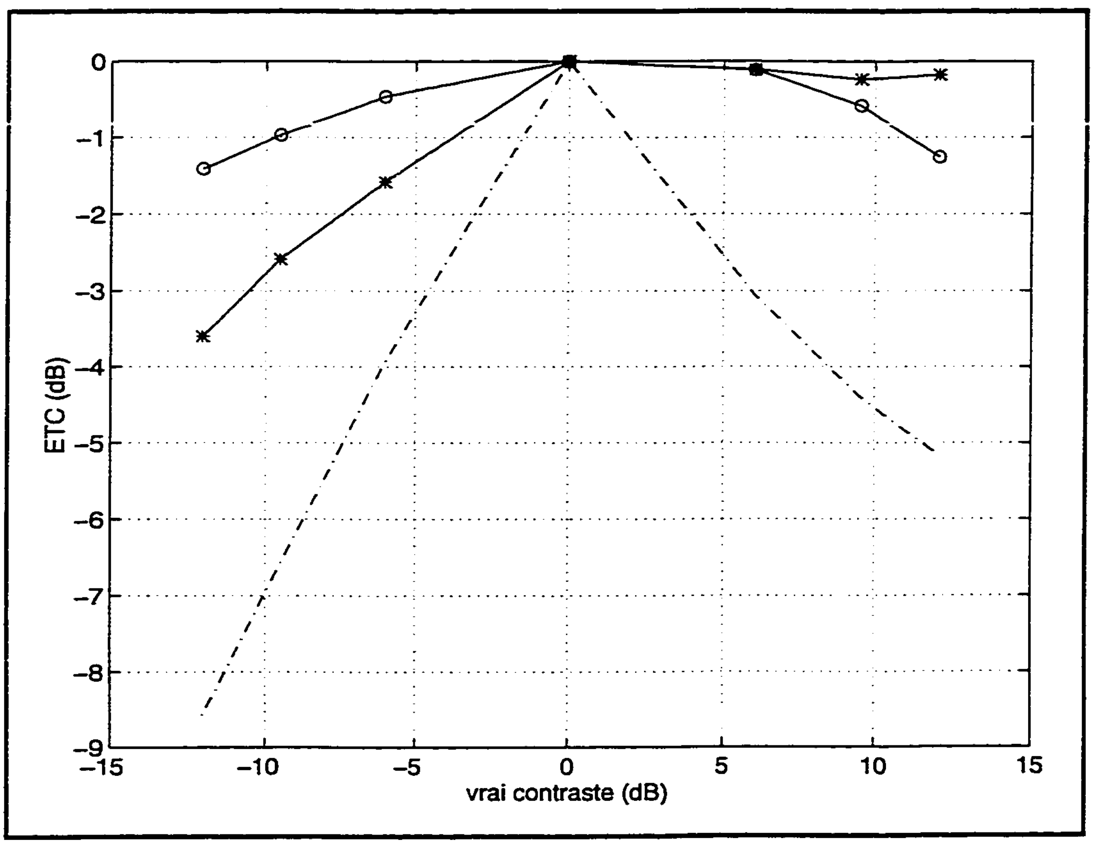


Figure 6.1 : Courbe d'efficacité de transfert de contraste en fonction du vrai contraste. Courbes obtenues sur un élastogramme conventionnel (------) et sur une image de rigidité (——) pour un cas de glissement pur pour une résolution du PI ordinaire. (***) : méthode de Gauss-Newton et (ooo) : méthode de Levenberg-Marquardt. Ces courbes représentent les résultats obtenus après 30 itérations.

Cette figure montre que la résolution du PI avec la méthode de Gauss-Newton régularisée à l'aide de la VCG donne des résultats légèrement supérieurs dans un cas d'inclusions molles, mais que la méthode de Levenberg-Marquardt est un peu plus efficace dans la détection d'inclusions dures. Il est aussi possible d'observer que peu importe le type d'optimisation utilisée, l'ETC obtenue sur un élastogramme conventionnel est toujours inférieure à celle obtenue sur les images de rigidité.

Lorsque des incertitudes sur les conditions aux frontières sont ajoutées aux modèles (cas de résolution du PI hybride), la méthode de Gauss-Newton régularisée à l'aide de la VCG n'est plus très efficace. Notons d'ailleurs que dans un cas de résolution hybride pour la détection de nodules avec un contraste inférieur à deux, la méthode de Gauss-Newton régularisée est complètement inadaptée puisque la solution diverge. La figure 6.2 montre une image de rigidité obtenue à l'aide de la méthode de Gauss-Newton régularisée pour un cas de résolution hybride où 12 % d'erreur sur les conditions de glissement ont été ajoutés au système. Le graphique du bas représente les mêmes informations que celui du haut mais sont disposées différemment. La courbe rouge représente les valeurs que devraient avoir les triangles, alors que la courbe jaune représente les valeurs obtenues grâce à la méthode d'optimisation utilisée.

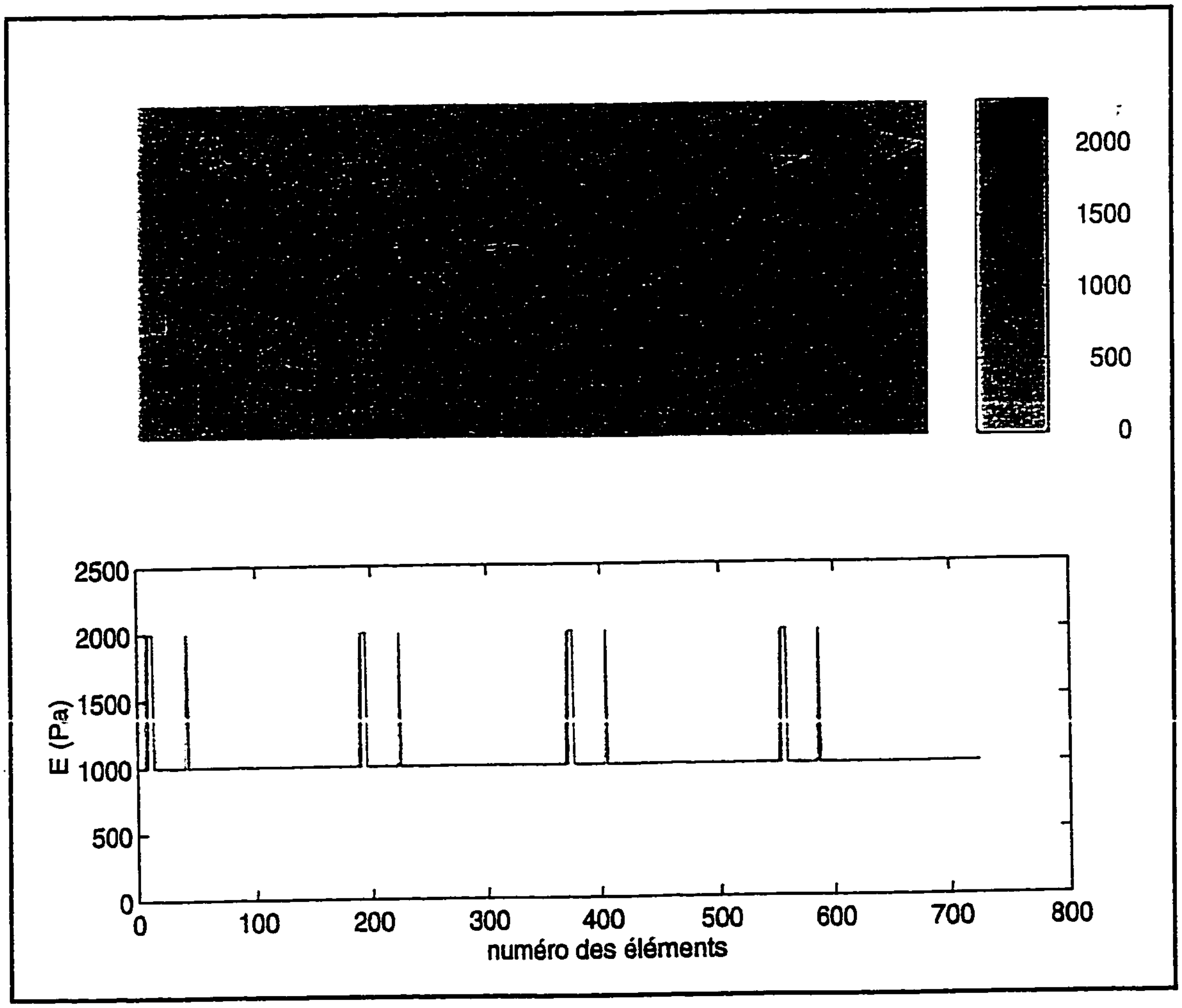


Figure 6.2 : Image de rigidité tracée pour tous les éléments du maillage.
Image obtenue pour un cas de résolution hybride avec 12 % d'erreur sur les conditions de glissement pour un contraste de 2. La méthode d'optimisation qui a été utilisée est celle de Gauss-Newton régularisée. Sur le graphique du bas, la courbe rouge indique les valeurs que devraient avoir les triangles et la courbe jaune représente les valeurs obtenues après la résolution du PI.

La figure 6.2 montre clairement que la méthode de Gauss-Newton est très sensible aux erreurs faites sur les conditions aux frontières et qu'il est donc impossible de faire une détection dans le cas où le contraste est de deux. Pour des cas où le contraste est supérieur à deux (figure 6.3), les résultats sont légèrement améliorés mais la détection demeure difficile.

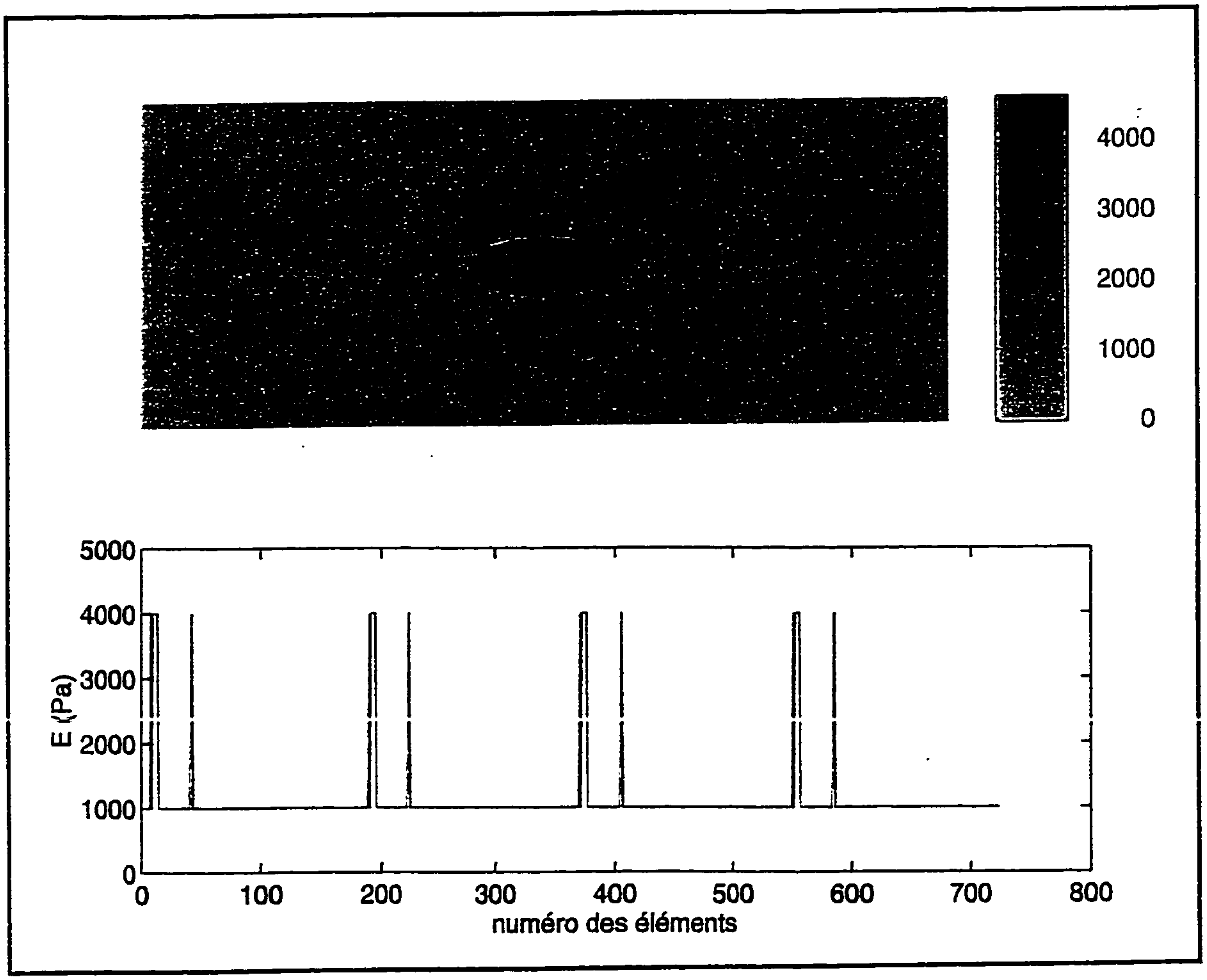


Figure 6.3 : Image de rigidité tracée pour tous les éléments du maillage.
Image obtenue pour un cas de résolution hybride avec 12 % d'erreur sur les conditions de glissement pour un contraste de 4. La méthode d'optimisation qui a été utilisée est celle de Gauss-Newton régularisée. Sur le graphique du bas, la courbe rouge indique les valeurs que devraient avoir les triangles et la courbe jaune représente les valeurs obtenues après la résolution du PI.

La figure 6.3 présente les résultats obtenus après une résolution du PI hybride effectuée avec la méthode de Gauss-Newton dans un cas où le contraste vaut quatre. Il apparaît sur cette figure que l'image de rigidité est très bruitée malgré le fait que ces résultats proviennent de données simulées. Ainsi, avec cette méthode très sensible aux incertitudes reliées aux conditions aux frontières, il est difficile d'effectuer une bonne détection.

Il est intéressant de noter que, malgré une ETC élevée (-1dB) obtenue pour un contraste de quatre avec la méthode de Gauss-Newton régularisée, la détection de l'inclusion est difficile. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que lorsque le calcul du contraste observé (C_o) est effectué, la moyenne de rigidité de tous les triangles de l'inclusion est divisée par la moyenne de la rigidité de l'arrière-plan. Ainsi, la valeur moyenne de l'arrière-plan tend vers la bonne rigidité mais les variations de rigidité autour de cette moyenne sont tellement grandes que la détection devient très difficile. Il faudra donc être prudent lors de l'évaluation des courbes d'ETC, puisque ces valeurs peuvent faussement donner l'impression que la détection se fait facilement.

L'examen des résultats obtenus avec la méthode de Levenberg-Marquardt (figure 6.4), nous indique qu'il est possible de détecter l'inclusion beaucoup plus facilement qu'avec la méthode de Gauss-Newton. Malgré cette grande amélioration, quelques problèmes demeurent. En effet, la figure 6.4 montre bien que la méthode de Levenberg-Marquardt provoque des surestimations de la rigidité de certains éléments du maillage. Ce phénomène est présent autour des éléments 60, 190 et 550 qui représentent des zones autour de l'inclusion et près des frontières inférieure et supérieure où les conditions hybrides ont été appliquées.

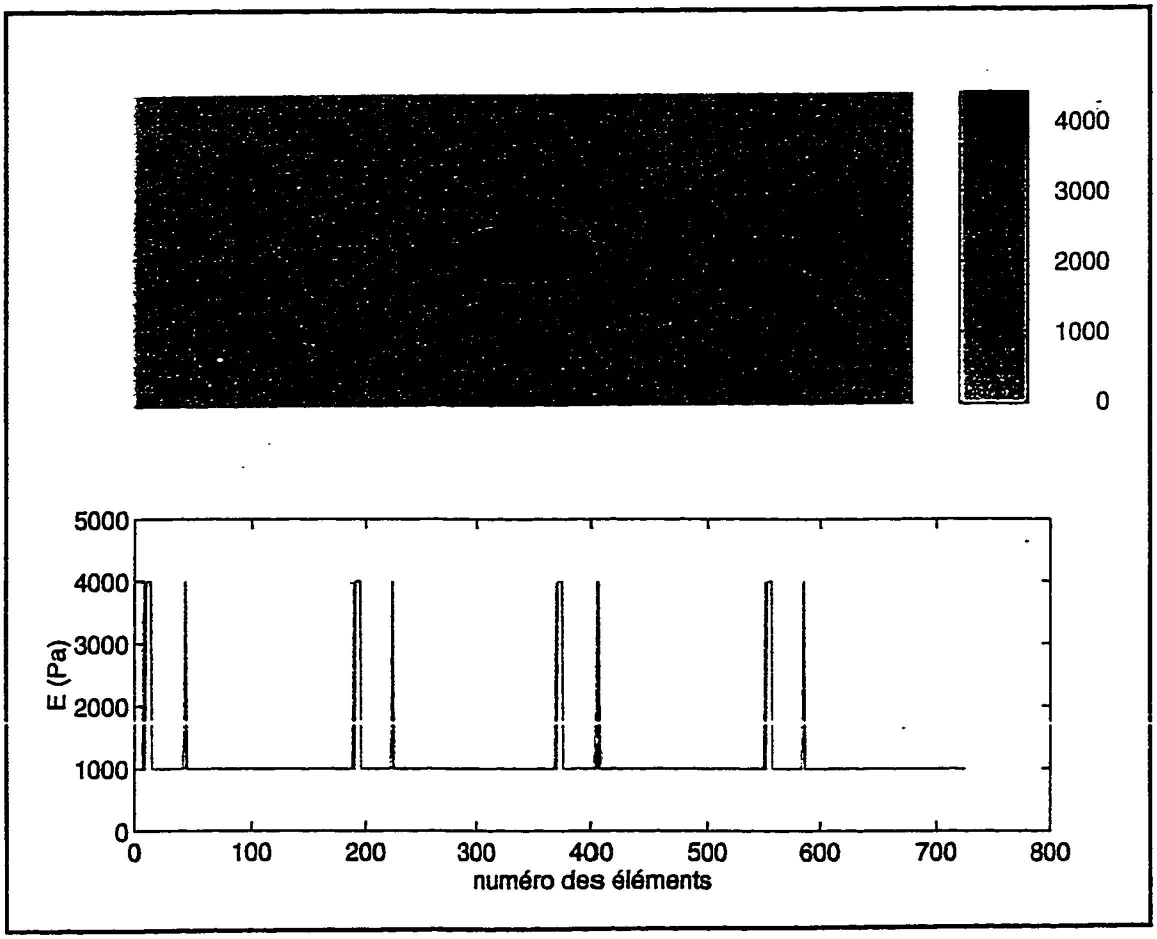


Figure 6.4 : Image de rigidité tracée pour tous les éléments du maillage.
Image obtenue pour un cas de résolution hybride avec 12 % d'erreur sur les conditions de glissement pour un contraste de 4. La méthode d'optimisation qui a été utilisée est celle de Levenberg-Marquardt. Sur le graphique du bas, la courbe rouge indique les valeurs que devraient avoir les triangles et la courbe jaune représente les valeurs obtenues après la résolution du PI.

Afin de pallier en partie ces problèmes de surestimation, nous avons introduit la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée qui correspond à la méthode de Levenberg-Marquardt à laquelle de l'*a priori* sur les modules d'Young a été ajouté à l'aide d'une matrice de corrélation (voir chapitre 4). Cette matrice force les éléments du maillage à avoir une valeur de rigidité proche de celle de leurs voisins. Ceci permet donc de réduire l'apparition des surestimations qui étaient présentes sur les images obtenues à l'aide de la méthode de Levenberg-Marquardt. La figure 6.5 montre les résultats lissés obtenus à l'aide de la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée.

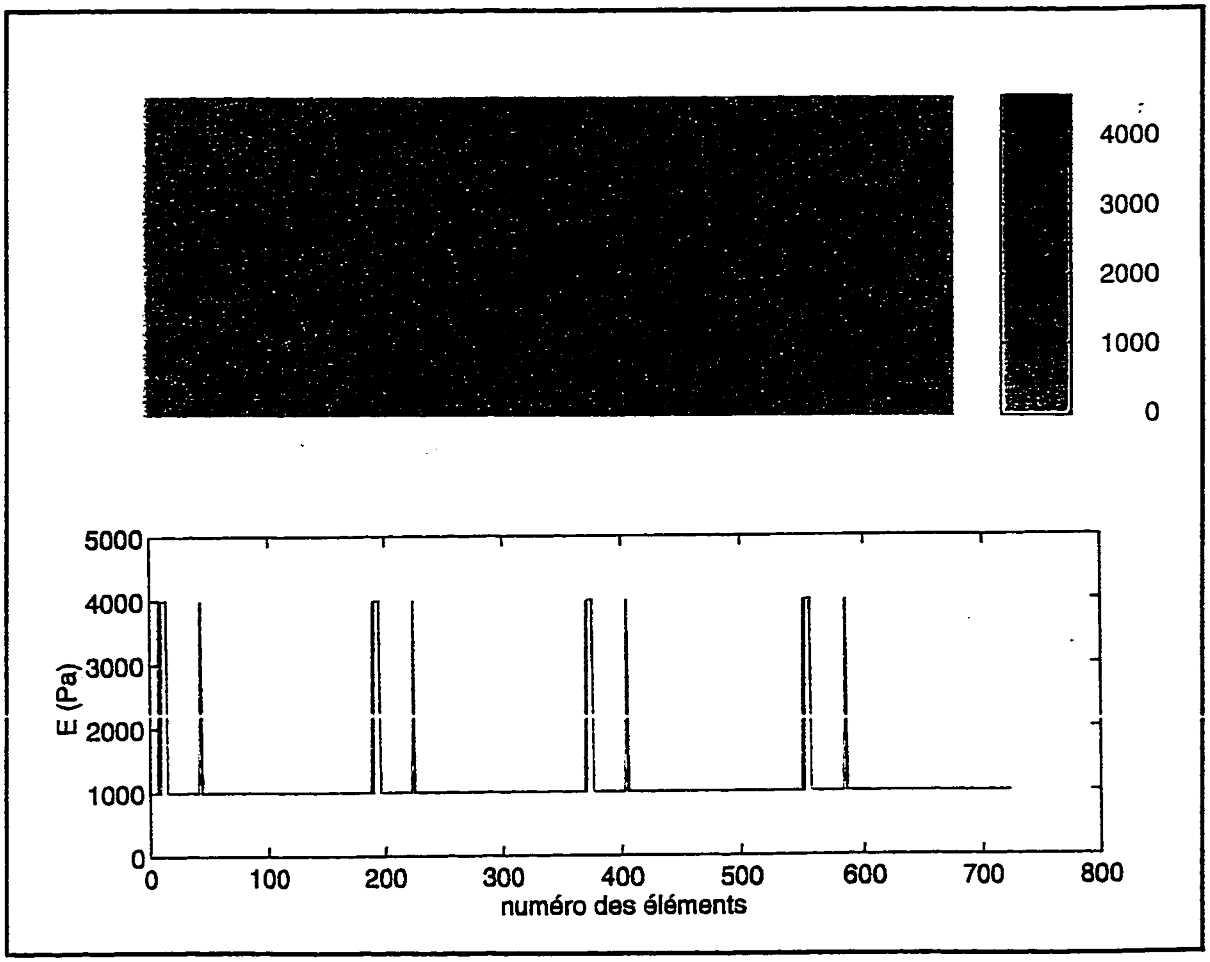


Figure 6.5 : Image de rigidité tracée pour tous les éléments du maillage.
Image obtenue pour un cas de résolution hybride avec 12 % d'erreur sur les conditions de glissement pour un contraste de 4. La méthode d'optimisation qui a été utilisée est celle de Levenberg-Marquardt modifiée. Sur le graphique du bas, la courbe rouge indique les valeurs que devraient avoir les triangles et la courbe jaune représente les valeur obtenues après la résolution du PI.

Afin d'étudier l'effet des incertitudes sur les conditions aux frontières lors de la résolution du problème inverse en élastographie, nous devons être en mesure de résoudre le problème aux conditions hybrides et de choisir la méthode d'optimisation la plus adéquate. Notre choix s'est arrêté sur la méthode la plus robuste, qui est capable de converger vers une solution même lorsque les conditions aux frontières expérimentales sont différentes de celles imposées au modèle. Ainsi, compte tenu des résultats présentés dans cette section, la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée s'est avérée être la technique d'optimisation qui répond le plus à nos critères de sélection. En effet, grâce à cette méthode il est possible de résoudre le problème inverse en incorporant différents degrés d'incertitude sur les frontières. Ainsi, la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée est la méthode d'optimisation qui sera utilisée pour tout le reste de l'étude.

6.2 Effets des conditions aux frontières de quasi-glissement et de quasi-orthogonalité sur les images de déformation et de rigidité

6.2.1 Conditions de quasi-glissement

Les conditions de glissement partiel ou de quasi-glissement sont utilisées dans le but de simuler l'état réel de l'interface peau/compresseur pendant les conditions expérimentales. Afin de vérifier l'effet de ces conditions de quasi-glissement sur les images de déformation et de rigidité, un cas de glissement pur est comparé à un cas de quasi-glissement.

La figure 6.6 représente des images de déformation obtenues dans des conditions de glissement pur imposées aux frontières supérieure et inférieure et dans des conditions de quasi-glissement. La figure 6.7 représente, quant à elle, des images de rigidité obtenues après la résolution du problème inverse ordinaire, c'est-à-dire un cas où les conditions aux frontières imposées au modèle sont les mêmes que celles imposées expérimentalement. La première image de rigidité de cette figure correspond à des résultats obtenus dans des conditions de glissement pur et la deuxième à ceux obtenus dans des conditions de quasi-glissement.

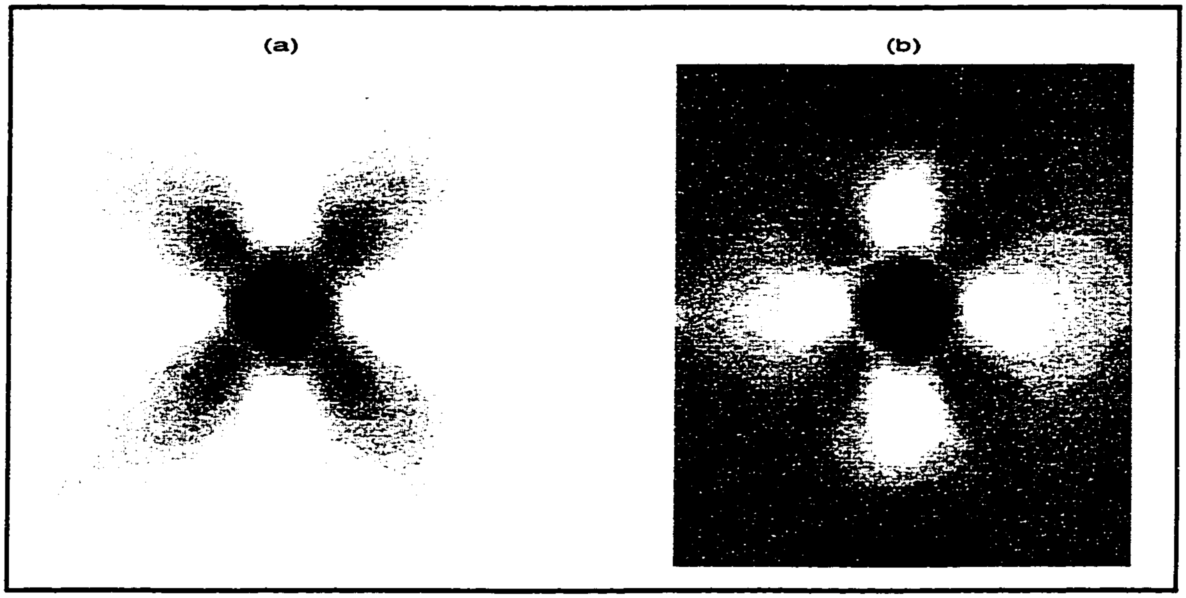


Figure 6.6 : Images de déformation.
Élastogrammes conventionnels obtenus pour des conditions de (a) glissement pur et (b) glissement partiel dans un cas où le contraste est de 4. Sur les images de déformation, les zones dures sont représentées par des régions noires et les zones molles par des régions blanches.

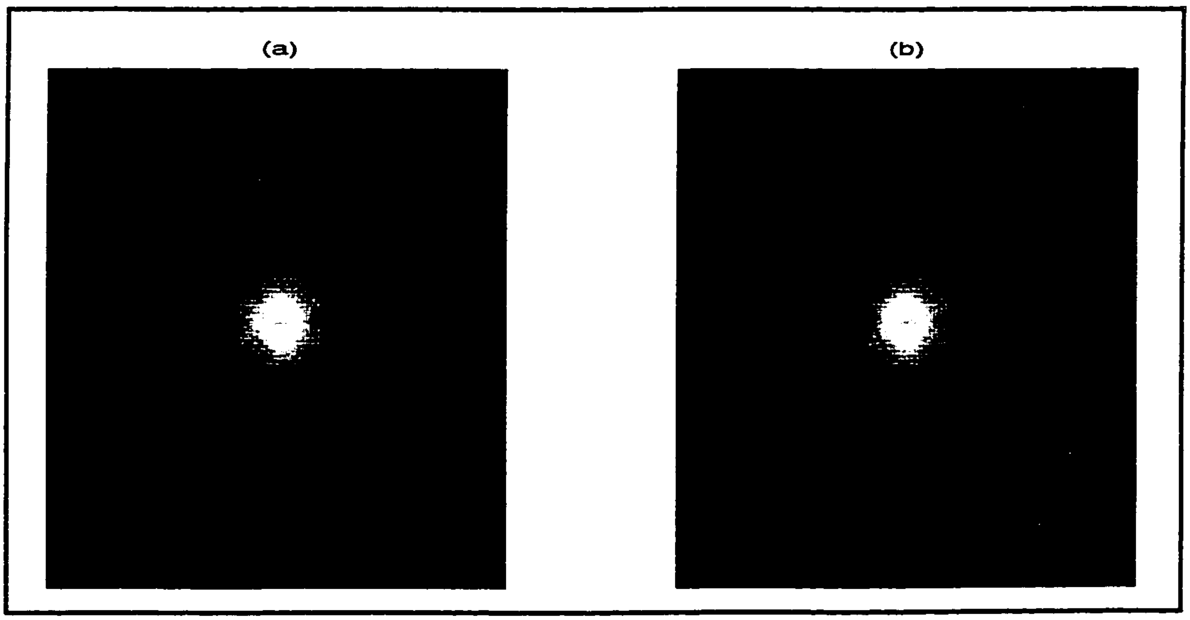


Figure 6.7 : Images de rigidité.
Images de rigidité obtenues par la résolution du PI ordinaire pour des conditions de (a) glissement pur et (b) glissement partiel dans un cas où le contraste est de 4. Sur les images de rigidité, les zones dures sont représentées par des régions blanches et les zones molles par des régions noires.

Les figures 6.6 et 6.7 montrent bien que les images de déformation sont influencées par les conditions aux frontière de glissement partiel, alors que les images de rigidité ne le sont pas. En effet, sur la figure 6.7, les reconstructions de la rigidité sont très similaires pour le glissement pur et le glissement partiel. Il semble donc que la résolution du problème inverse nous permette d'obtenir des images indépendantes des conditions aux frontières en autant que celles-ci soient les mêmes pour le modèle et pour les simulations expérimentales. Il en est autrement pour les images de déformation. La comparaison des deux images de la figure 6.6 montre clairement que les conditions de quasi-glissement entraînent une sous-estimation générale de la déformation de l'arrière-plan par rapport aux valeurs trouvées dans un cas de glissement pur. Il est également clair qu'il existe une sous-estimation de déformation marquée pour des zones contiguës aux frontières supérieure et inférieure. Notons aussi que lors de l'examen d'une image de déformation obtenue en condition de quasi-glissement pour un cas de spécimen homogène, il est possible d'observer une légère surestimation de la déformation dans la zone centrale. Sur la figure 6.6, ce phénomène est masqué par la présence de l'inclusion dure au centre du spécimen.

Ce phénomène de sous-estimation de déformation de l'arrière-plan et de surestimation de la zone centrale du spécimen engendre des problèmes lors de l'étude de l'efficacité de transfert de contraste des images de déformation. Par exemple, la figure 6.8 expose des courbes de contraste observé (C_o) sur des élastogrammes conventionnels tracées en fonction du vrai contraste (C_t). Trois des quatre courbes de la figure 6.8 ont été obtenues à partir d'une solution analytique et de données simulées dans des conditions de glissement partiel et de glissement pur. La quatrième courbe de cette figure correspond à un cas idéal pour lequel le contraste observé sur l'élastogramme est équivalent au vrai contraste.

La figure 6.8 révèle que les conditions de glissement pur sont près du cas décrit analytiquement pour des contrastes supérieurs à 0dB, alors que les conditions de glissement partiel sont très près de la solution analytique pour des contrastes inférieurs à 0dB. En fait, le phénomène de sous-estimation de l'arrière-plan et de surestimation de la zone centrale, présent lors de l'application des conditions de glissement partiel, résulte en une sous-estimation du contraste principalement dans les cas de nodules durs et en une surestimation dans les cas de nodules mous. Ainsi, dans des conditions de glissement partiel, le contraste observé idéal ne se situe plus à 0dB mais bien à l'intersection (-1,5dB environ) de la courbe tracée dans des conditions idéales et celle tracée dans des conditions de glissement partiel. En effet, c'est à ce point de rencontre des deux courbes que le contraste observé équivaut au vrai contraste.

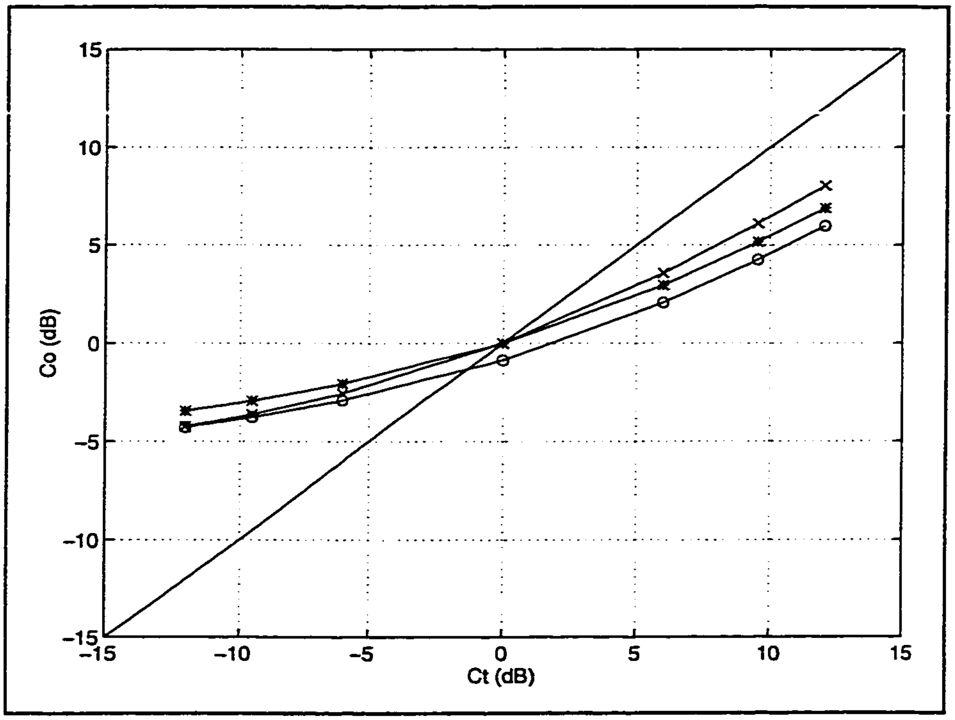


Figure 6.8 : Contraste observé sur des élastogrammes conventionnels.
Courbes obtenues à partir d'une solution analytique (xxx) et de données simulées dans des conditions de glissement pur (***) et de glissement partiel (ooo). La droite (——) représente le cas idéal où Co = Ct en tout temps.

Grâce à ces observations, il est clair que l'équation 4.50 ne convient pas pour le calcul de l'efficacité de transfert de contraste sur un élastogramme conventionnel dans un cas de glissement partiel. En effet, cette équation, normalisée par rapport aux valeurs obtenues à 0dB, est valide dans un cas où le contraste idéal est obtenu à 0dB. Si l'équation 4.50 n'est pas modifiée et est utilisée pour calculer l'efficacité du transfert de contraste dans un cas de glissement partiel, des résultats aberrants comme une efficacité de transfert de contraste supérieure à 100 % sont possibles. Ce phénomène est dû au fait que l'équation 4.50 fait l'hypothèse que pour un vrai contraste supérieur à 0dB, les valeurs du contraste observé sont elles aussi supérieures à 0dB. Mais, dans un cas de quasi-glissement, si la rigidité d'une inclusion centrée sur le spécimen est légèrement supérieure à l'arrière-plan (par exemple 1,5dB) il est possible que la surestimation de déformation de l'arrière-plan et la sous-estimation de la zone centrale associées à ce type de conditions aux frontières résultent en un contraste observé inférieur à 0dB où l'inclusion semble plus molle que l'arrière-plan. Alors, en utilisant une équation plus générale de la forme suivante :

$$\mathrm{ETC} = -\left|C_o(\mathrm{dB}) - C_t(\mathrm{dB})\right| \qquad \textbf{\textit{(6.1)}}$$

on élimine le problème d'efficacité supérieure à 100 %, rencontré dans les cas de conditions de glissement partiel sur les images de déformation. La figure 6.9 montre les résultats obtenus à l'aide de cette normalisation ***(6.1)***, pour des cas de glissement partiel, de glissement pur et de solution analytique.

Sachant que l'ETC maximale est à 0dB, il est normal que le maximum de la courbe de quasi-glissement soit légèrement décalée vers la gauche puisque, comme nous l'avons souligné plus tôt, l'ETC maximale des conditions de quasi-glissement se trouve à $C_t \cong -1{,}5$dB. La figure 6.9 montre que, pour un contraste supérieur à environ −1dB, la résolution du problème direct résulte en une ETC supérieure dans un cas de glissement pur. Pour un contraste inférieur à environ −1dB, l'ETC observée sur un élastogramme conventionnel est supérieure dans un cas de quasi-glissement que dans un cas de glissement pur.

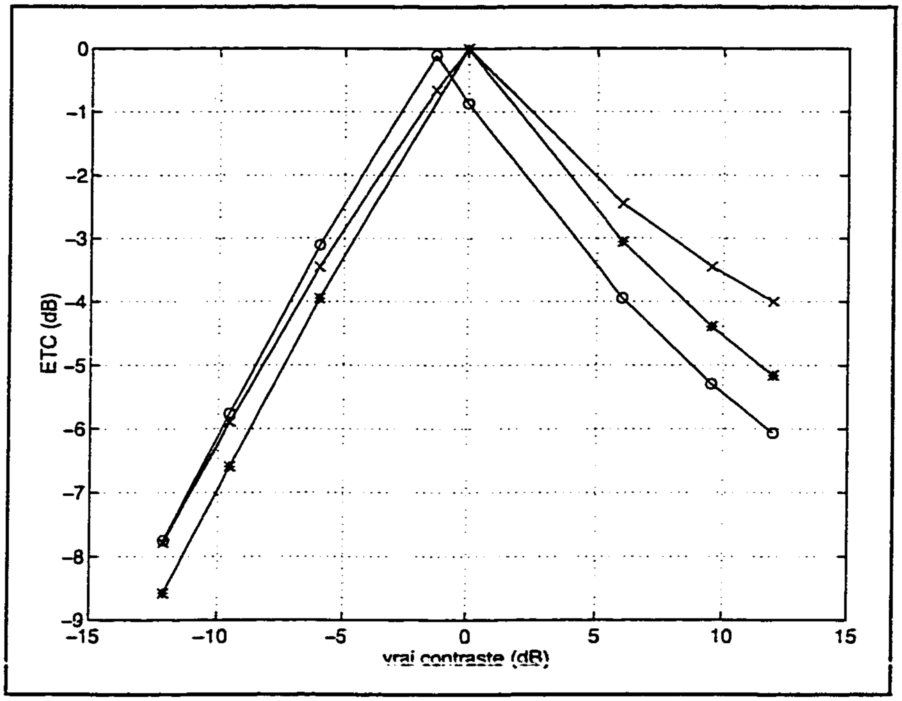


Figure 6.9 : Courbes d'ETC normalisées par rapport à 0dB.
Courbes d'ETC normalisées, obtenues sur des élastogrammes conventionnels à partir de solution analytique (xxx) et de données simulées dans des conditions de glissement pur (***) et de glissement partiel (ooo).

6.2.2 Conditions de quasi-orthogonalité

Afin d'étudier l'effet d'une erreur possible dans la direction d'application de la force de compression, des simulations avec des angles d'application autres que 90° entre la ligne d'action de la force et la surface supérieure du spécimen (conditions de quasi-orthogonalité) ont été réalisées.

Sur la figure 6.10, le premier élastogramme (a) représente les résultats de déformation obtenus pour un cas de conditions aux frontières de non-glissement pur sur la surface inférieure et de glissement pur sur la surface supérieure avec une direction d'application de force parfaitement perpendiculaire. La figure 6.10 (b) représente, pour sa part, une image de déformation d'un cas où des conditions de non-glissement ont été imposées à la frontière inférieure et des conditions de glissement avec une direction d'application de la force quasi orthogonale (87,5°) à la surface supérieure. Cette figure permet de constater que l'effet des conditions aux frontières impliquant une direction d'application non orthogonale de la force a aussi un effet dans la résolution du problème direct. En effet, la figure 6.10 (b) montre une légère sous-estimation de déformation à gauche de l'inclusion et une légère surestimation à droite lorsque l'image (b) est comparée à l'image (a) obtenue pour une direction d'application de la force parfaitement orthogonale.

On peut aussi remarquer, sur la figure 6.11, que les conditions aux frontières n'affectent pas l'image de rigidité puisque, pour différentes conditions aux frontières dans la direction d'application de la force, il est possible d'obtenir des images de rigidité très similaires.

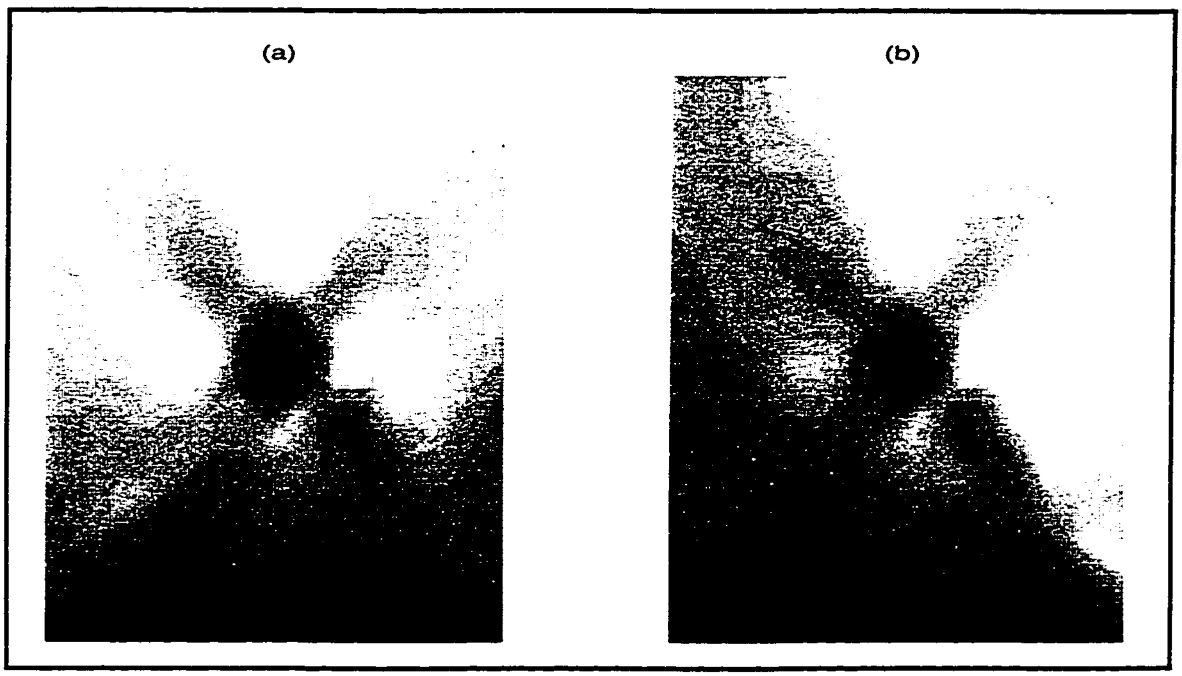


Figure 6.10 : Images de déformation.
Élastogramme conventionnel obtenu pour des conditions (a) d'orthogonalité et (b) de quasi-orthogonalité dans un cas où le contraste est de 4. Sur les images de déformation, les zones dures sont représentées par des régions noires et les zones molles par des régions blanches.

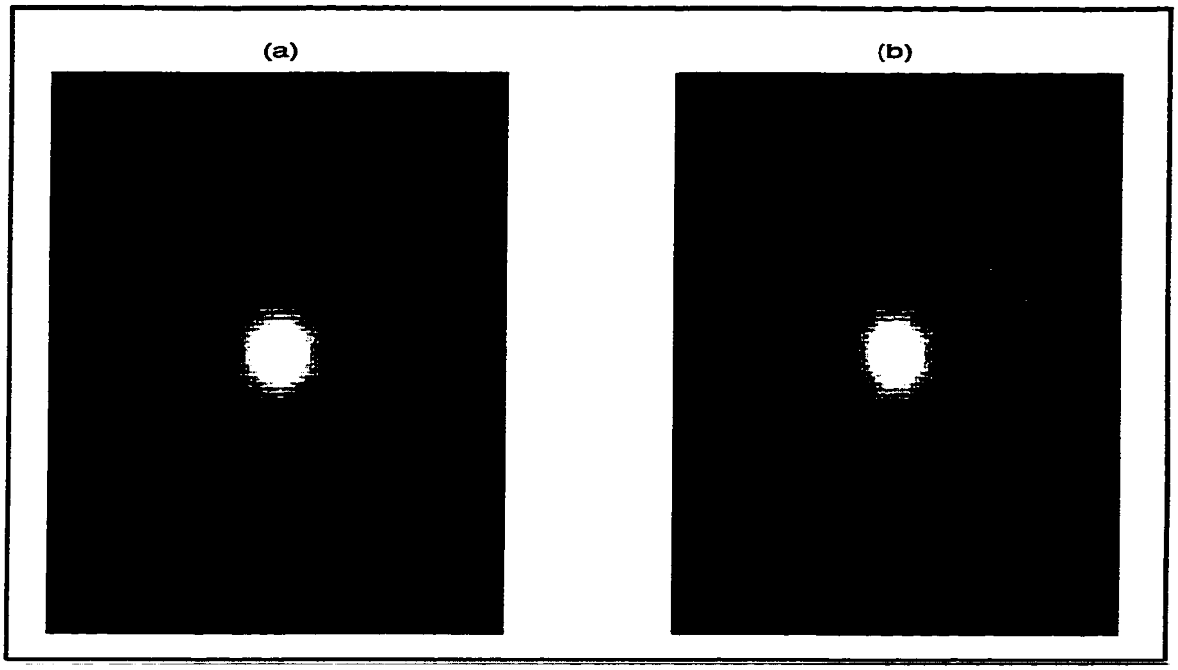


Figure 6.11 : Images de rigidité.
Images de rigidité obtenues par la résolution du PI ordinaire pour des conditions (a) d'orthogonalité et (b) de quasi-orthogonalité dans un cas où le contraste est de 4. Sur les images de rigidité, les zones dures sont représentées par des régions blanches et les zones molles par des régions noires.

En examinant la figure 6.12 qui représente la courbe du contraste observé sur un élastogramme en fonction du vrai contraste, il apparaît que le contraste observé obtenu à partir d'un cas de quasi-orthogonalité est inférieur au vrai contraste pour des cas d'inclusion inférieure à environ –2dB.

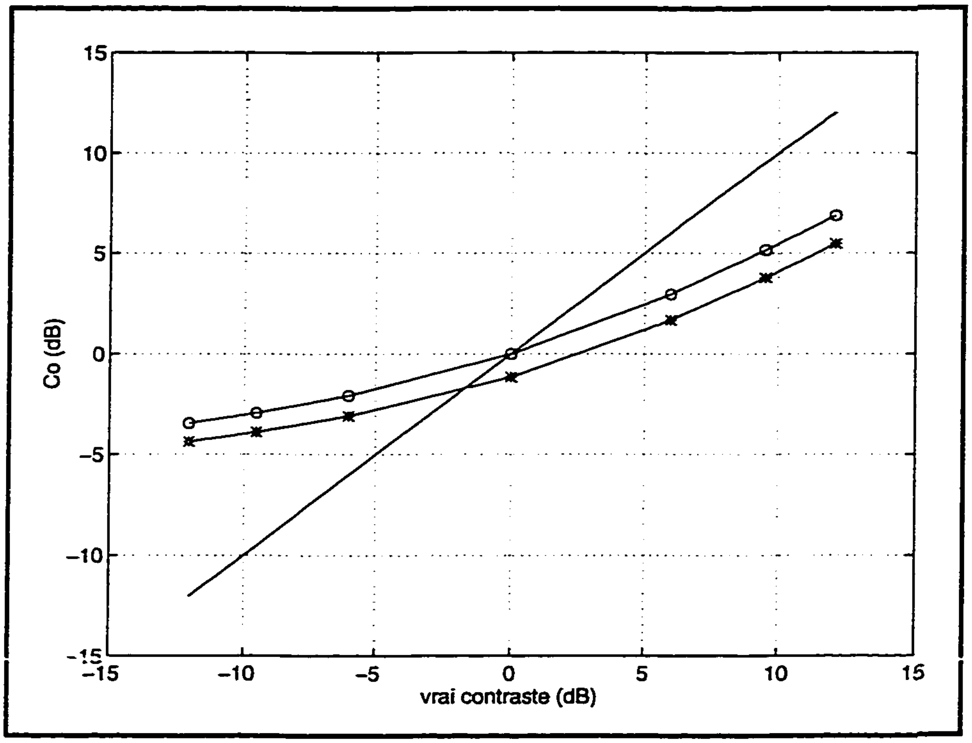


Figure 6.12 : Contraste observé sur les élastogrammes conventionnels en fonction du vrai contraste.

(* * *) : courbes obtenues à partir de données simulées avec des conditions de quasi-orthogonalité avec un angle de 87,5°; (ooo) : courbe obtenue avec des conditions d'orthogonalité; (——) : courbe correspondant à un cas idéal.

Bref, l'effet général des conditions aux frontières de quasi-orthogonalité lors de la résolution du problème direct et du problème inverse est très similaire à ce qui a été trouvé pour les conditions de quasi-glissement.

À la lumière de ce qui a été présenté dans cette partie du mémoire, il est clair que l'imposition de diverses conditions aux frontières peut amener des surestimations de certaines zones et des sous-estimations d'autres zones. Ceci peut même résulter en un contraste observé sur l'élastogramme artificiellement supérieur au contraste réel et, dans certains cas, mener à des ETC supérieures à 100 %. La modification apportée à l'équation *(4.50)* permet de tenir compte de ce problème et d'éviter d'obtenir une ETC supérieure à 100 %. Aussi, avec cette nouvelle formule *(6.1)*, il est possible de déterminer le contraste pour lequel l'efficacité est maximale, ce qui permet de mieux comparer les courbes entre elles.

Dans un cas où les conditions aux frontières sont les mêmes pour le modèle et les simulations expérimentales (PI ordinaire), ce problème de contraste observé artificiellement supérieur au contraste réel se trouve sur les élastogrammes conventionnels seulement. Dans un cas de résolution hybride, le problème est présent sur les images de déformation et de rigidité. C'est d'ailleurs ce qui sera exposé dans la prochaine section.

6.3 Effet de la résolution hybride sur les images de rigidité du PI

La résolution hybride consiste à résoudre le problème inverse en utilisant un modèle pour lequel les conditions aux frontières sont différentes de celles utilisées pour les simulations expérimentales. Ainsi, les conditions aux frontières du modèle sont considérées idéales et sont représentées par des conditions de glissement pur avec une direction d'application de la force parfaitement perpendiculaire à la surface supérieure du spécimen. Les simulations expérimentales sont, quant à elles, associées à des conditions de quasi-glissement avec une direction d'application de force non orthogonale à la surface supérieure du spécimen. Notons, par contre, que les effets de ces incertitudes (glissement et direction de la force) dans la résolution du PI hybride sont évalués séparément.

6.3.1 Conditions hybrides de glissement

Dans le cas de résolution hybride de glissement, le modèle associé à des conditions de glissement pur tente d'approcher le plus possible le champ de déplacement d'un spécimen dont les mouvements latéraux sont restreints aux frontières par les conditions de quasi-glissement. La réaction du modèle face à ce problème est d'ajouter des zones plus rigides dans les régions de quasi-glissement. Grâce à ces zones plus rigides, il est normal pour le modèle d'obtenir un déplacement réduit dans la direction latérale même avec des conditions de glissement pur. La figure 6.13 représente une image de rigidité reconstruite à l'aide de la résolution hybride pour un cas de rigidité homogène de 1kPa.

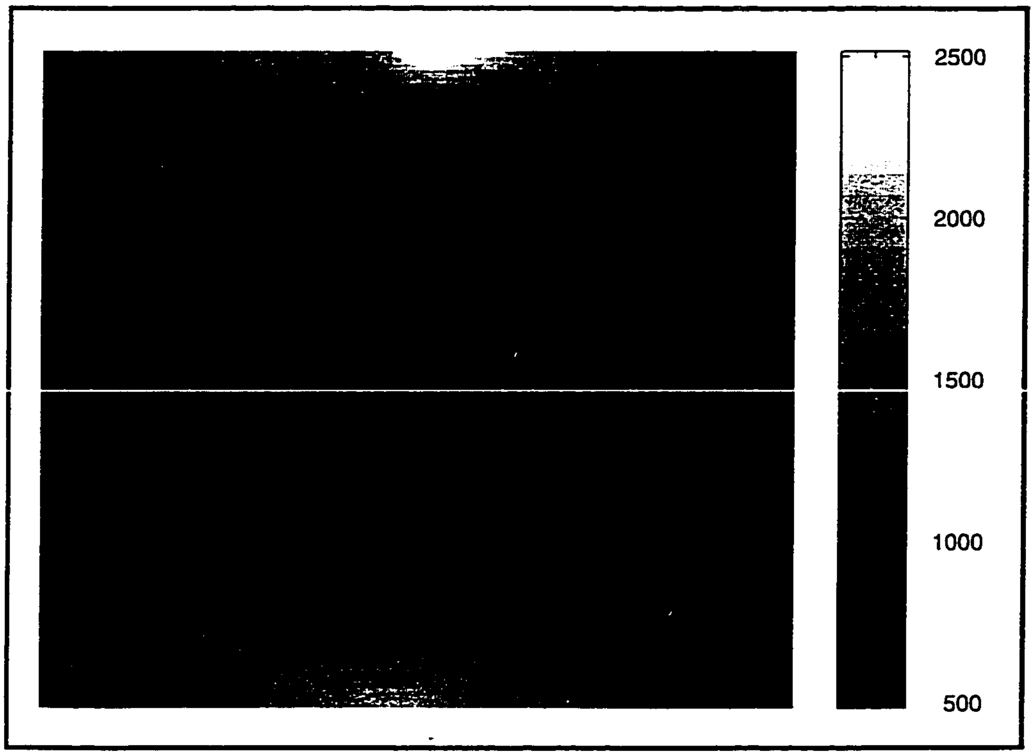


Figure 6.13 : Image de rigidité pour un cas de résolution hybride sans inclusion.
Cette image représente un cas de spécimen homogène avec 12 % d'erreur sur les conditions de glissement. Sur une image de rigidité, les zones plus rigides sont blanches et les zones plus molles sont noires.

Les zones de surestimations de rigidité de l'arrière-plan près des frontières sont clairement identifiables sur la figure 6.13 et ont des répercussions sur les courbes d'efficacité de transfert de contraste présentées à la figure 6.14.

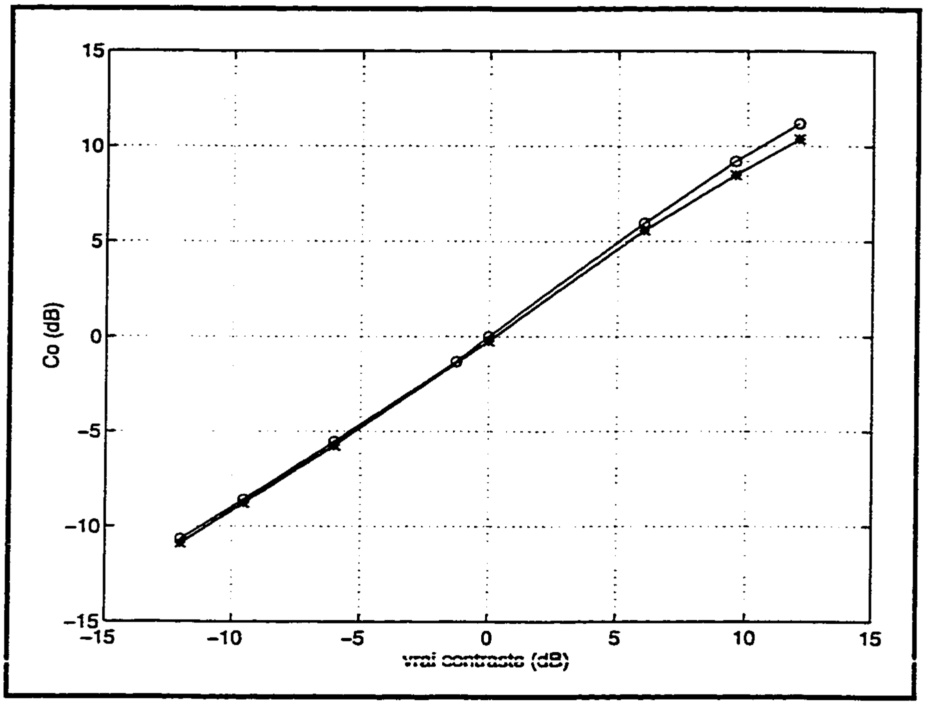


Figure 6.14 : Contraste observé sur l'image de rigidité en fonction du vrai contraste.
(ooo) : données obtenues à partir de la résolution du PI ordinaire; (***) : données obtenues à partir de la résolution du PI hybride avec 12 % d'erreur sur les conditions de glissement.

Sur la figure 6.14, on peut apercevoir un phénomène très similaire à celui obtenu sur les images de déformation lors de la résolution du problème direct dans des conditions de glissement partiel (figure 6.8). En effet, la surestimation de la rigidité pour les zones situées près des frontières résulte en un contraste observé inférieur à 0dB pour un cas de spécimen homogène (C_t = 0dB). En fait, la résolution hybride résulte en un contraste observé « artificiellement » sous-estimé pour les inclusion dures et « artificiellement » surestimé pour les inclusion molles. Ce phénomène est d'ailleurs clairement illustré à la figure 6.15 où l'ETC, calculée à l'aide de l'équation ***(6.1)***, est tracée en fonction du vrai contraste.

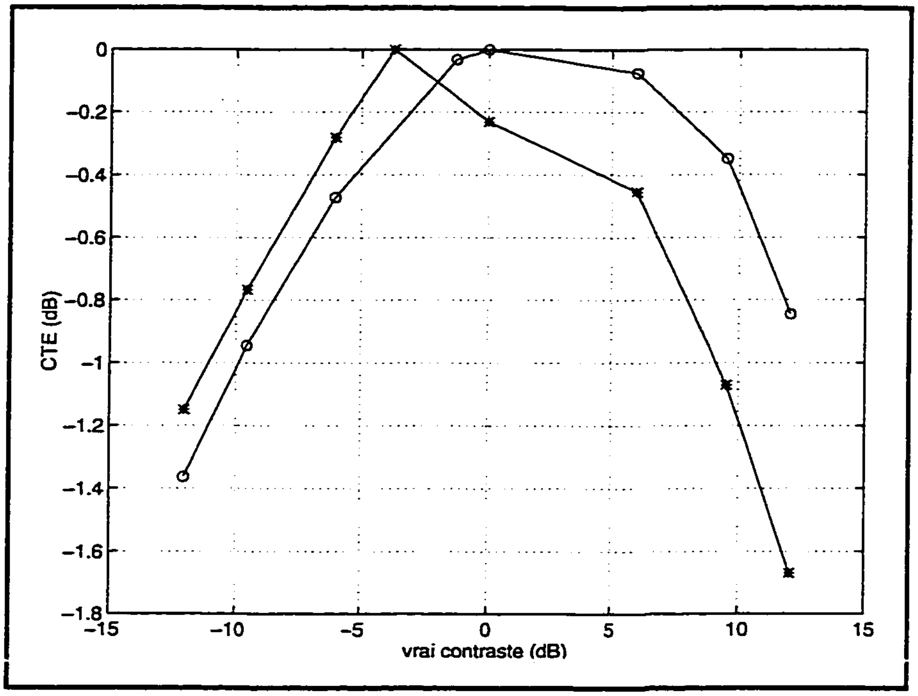


Figure 6.15 : Efficacité de transfert de contraste d'une image de rigidité.
(ooo) : données obtenues à partir de la résolution du PI ordinaire; (***) : données obtenues à partir de la résolution hybride avec 12 % d'erreur sur les conditions de glissement.

L'évaluation de ces deux courbes montre que pour des inclusions où C_t est supérieur à environ –2dB, l'ETC d'un cas de résolution ordinaire est supérieure à celle obtenue pour un cas de résolution hybride de glissement. Pour un contraste C_t inférieur à –2dB, la courbe obtenue pour la résolution hybride donne une ETC supérieure. Grâce à l'étude détaillée de l'effet de la résolution hybride de glissement faite préalablement, il est clair que cette efficacité supérieure est due à la surestimation de la rigidité de l'arrière-plan qui a tendance à diminuer la surestimation du contraste observé normalement rencontré (figure 6.14) sur les images de rigidité dans des cas d'inclusions molles.

La figure 6.16 représente les pourcentages d'erreurs relatives de l'inclusion et de l'arrière-plan pour les différents contrastes étudiés. Étant donné que les données expérimentales sont simulées, il est possible d'évaluer les surestimations et les sous-estimations obtenues sur les images de rigidité en comparant les valeurs de rigidité obtenues suite à la résolution du problème inverse avec celles qu'on devrait réellement obtenir. Sur la figure 6.16, un pourcentage d'erreur positive signifie une surestimation par rapport à la vraie valeur de rigidité et un pourcentage d'erreur négative signifie une sous-estimation de la rigidité.

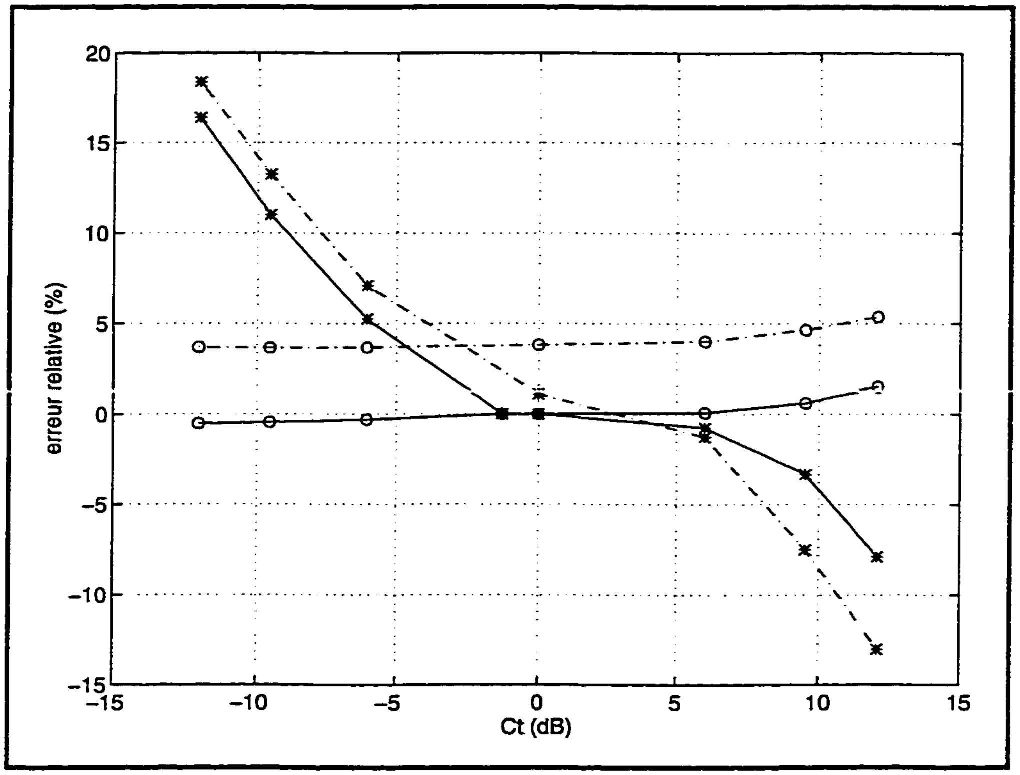


Figure 6.16 : Erreurs relatives obtenues sur des images de rigidité.
(——) : résolution du PI ordinaire; (——) : résolution du PI hybride de glissement avec 12 % d'erreur sur les conditions aux frontières. (***) : erreur relative sur la rigidité de l'inclusion; (ooo) : erreur relative sur la rigidité de l'arrière-plan.

Examinons tout d'abord la zone d'inclusions dures ($C_t > 0$) de la figure 6.16.

Dans le cas de la résolution du PI ordinaire (sans erreur sur les conditions aux frontières), on retrouve une légère surestimation de la rigidité de l'arrière-plan et une sous-estimation de la rigidité de l'inclusion. Ces surestimations et sous-estimations peuvent être expliquées par le fait que la résolution du PI ordinaire est effectuée à l'aide de la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée qui implique la notion de corrélation entre les modules de tous les éléments du maillage de la structure étudiée. Ainsi, l'inclusion dure est toujours légèrement sous-estimée puisque les valeurs sont lissées et les frontières de l'inclusion sont donc influencées par les valeurs de rigidité inférieure de l'arrière-plan. Et, de la même façon, l'arrière-plan est légèrement surestimé en raison de l'inclusion.

Le comportement des erreurs relatives est identique pour le cas de la résolution hybride, puisqu'il existe une surestimation relativement constante de l'arrière-plan et une sous-estimation de l'inclusion. La surestimation, plus élevée dans ce cas-ci, peut être expliquée par la présence des zones plus rigides illustrées à la figure 6.13, alors que la sous-estimation peut être expliquée de la même façon que pour le cas de résolution du problème inverse ordinaire.

Examinons maintenant la zone d'inclusions molles ($C_t < 0$) de la figure 6.16.

Le comportement des erreurs relatives est différent pour les cas de résolution hybride et ordinaire, puisqu'il existe une surestimation de rigidité de l'arrière-plan pour un cas hybride et une légère sous-estimation pour le cas ordinaire. Pour le cas ordinaire, le lissage tend à donner la valeur moyenne à tous les éléments du maillage. Ainsi, le fait d'avoir une inclusion molle vient affecter légèrement à la baisse la valeur moyenne de l'arrière-plan. Par contre, pour le cas de la résolution hybride, les zones de rigidité élevée retrouvées à proximité des frontières ont un effet beaucoup plus significatif sur la valeur moyenne de la rigidité de l'arrière-plan que ne l'est la présence d'une inclusion molle.

Dans le même ordre d'idée, il est possible d'expliquer la surestimation de l'inclusion présente dans le cas de résolution du PI ordinaire et dans le cas de résolution hybride. En effet, encore une fois, le lissage de la rigidité associée à la méthode de Levenberg-

Marquardt modifiée résulte en une rigidité de l'inclusion qui est influencée par la rigidité de l'arrière-plan. Dans ce cas, étant donné que l'arrière-plan est plus rigide que l'inclusion, la rigidité de cette dernière est donc surestimée.

Les figures 6.15 et 6.16 complètent bien l'étude de l'effet des conditions hybrides sur les images de rigidité. Grâce à la figure 6.15, il semble que l'ETC d'une inclusion molle (C_t<-2dB) dans un cas de résolution hybride est légèrement supérieure à l'ETC obtenue pour une résolution ordinaire. Pour les autres types d'inclusions, la résolution ordinaire semble donner une meilleure ETC. La figure 6.16 montre, quant à elle, que peut importe le type d'inclusion, les erreurs relatives de rigidité, obtenues pour l'inclusion et l'arrière-plan dans un cas de résolution hybride sont toujours plus élevées que celles obtenues dans un cas de résolution ordinaire. Or, si l'information désirée est strictement le contraste sur l'image, on finit par obtenir de meilleurs résultats dans un cas de résolution hybride principalement à cause de la surestimation de la rigidité de l'arrière-plan. Par contre, si les valeurs de rigidité absolue associée à l'inclusion et l'arrière-plan sont des paramètres importants, la courbe obtenue à la figure 6.15 n'est plus suffisante et il est nécessaire de l'étudier en parallèle avec des courbes d'erreurs relatives (figure 6.16).

6.3.2 Conditions hybrides dans la direction d'application de la force de compression

Dans un cas de résolution hybride dans la direction d'application de la force, il est possible d'observer sur la figure 6.17 que l'image de rigidité est affectée. En effet, il existe une légère surestimation de rigidité d'un coté du spécimen combinée à une légère sous-estimation de l'autre coté. Ainsi, la valeur moyenne de la rigidité de l'arrière-plan ne devrait pas être trop affectée. Les figures 6.18 et 6.19 montrent qu'effectivement les pourcentages d'erreur sur l'arrière-plan pour les cas de résolution hybride demeurent relativement constants ce qui fait qu'il n'existe pas de contraste observé artificiellement inférieur ou supérieur.

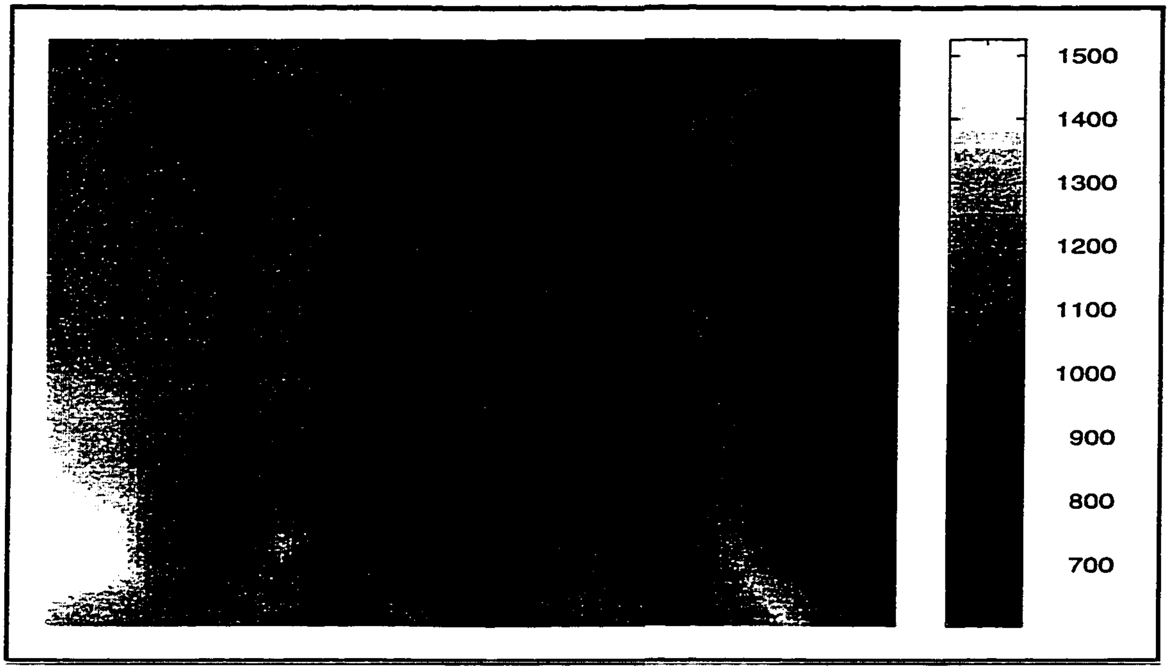


Figure 6.17 : Image de rigidité pour un cas de résolution hybride sans inclusion.
Cette image représente un cas de spécimen homogène avec 2,8 % d'erreur sur les conditions de direction d'application de la force de compression. Sur une image de rigidité, les zones plus rigides sont blanches et les zones plus souples sont noires.

Sur la figure 6.18, qui représente la courbe d'ETC en fonction du vrai contraste, il est possible de remarquer que l'ETC du cas de résolution du PI ordinaire est toujours supérieure à celle trouvée pour un cas de résolution hybride. La figure 6.19 confirme ces résultats puisqu'il est possible d'observer que l'erreur relative de la rigidité de l'arrière-plan reste presque nulle pour le cas de résolution du PI ordinaire ou hybride. Aussi, dans un cas de résolution du PI hybride, l'erreur sur l'inclusion est toujours plus élevée que celle trouvée sur l'image de rigidité du PI ordinaire. Il est donc normal que l'ETC du cas de résolution hybride de quasi-orthogonalité demeure toujours inférieure à l'ETC obtenue dans un cas de résolution du PI ordinaire.

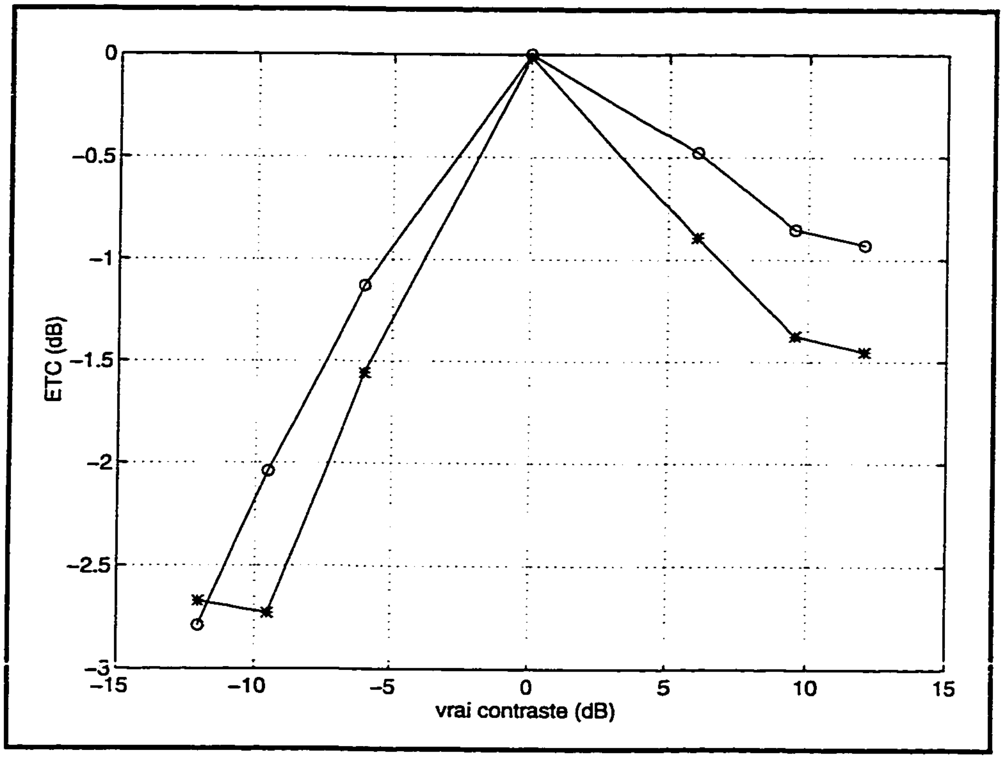


Figure 6.18 : Efficacité de transfert de contraste d'une image de rigidité.
(ooo) : données obtenues à partir de la résolution du PI ordinaire avec des conditions de quasi-orthogonalité; (***) : données obtenues à partir de la résolution du PI hybride avec 2,8 % d'erreur sur les conditions de direction d'application de la force de compression.

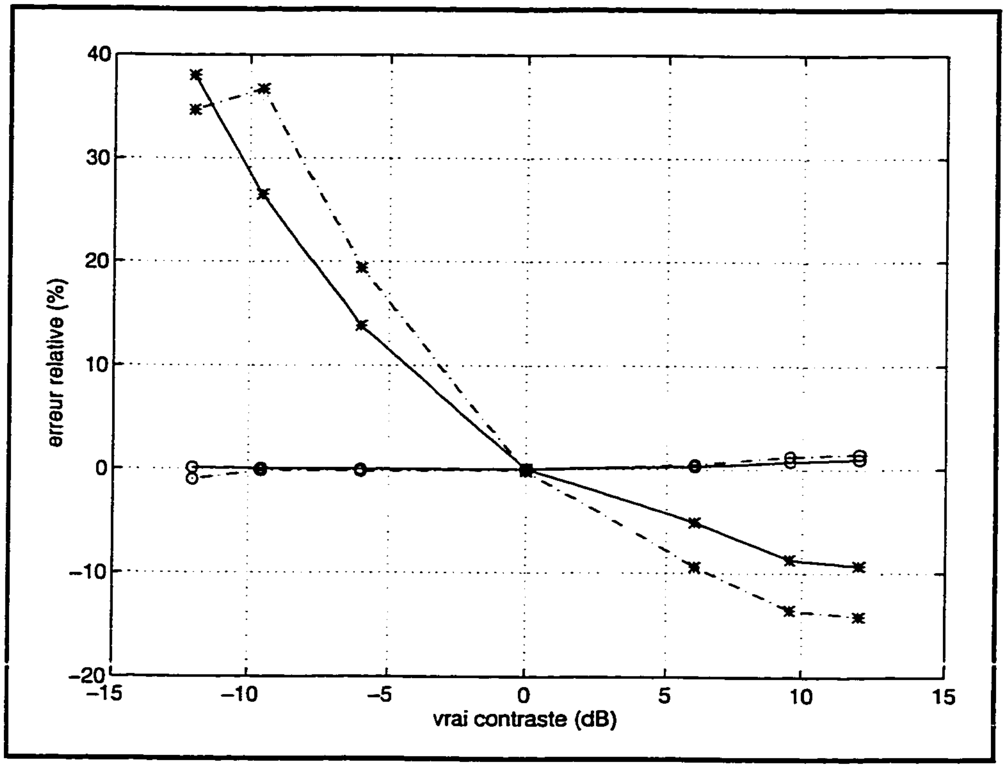


Figure 6.19 : Erreurs relatives obtenues sur des images de rigidité.
(——) : résolution du PI ordinaire; (——) : résolution hybride avec 2,8 % d'erreur sur les conditions aux frontières de direction d'application de la force. (***) : erreur sur la rigidité de l'inclusion; (ooo) : erreur sur la rigidité de l'arrière-plan.

6.4 Effet de la position de l'inclusion dans un cas de résolution hybride de glissement partiel

Afin de vérifier si les résultats obtenus lors de la résolution hybride dépendent de la position de l'inclusion, des résolutions hybrides de glissement ont été effectuées pour des inclusions situées à différentes profondeurs.

La figure 6.20 représente les courbes d'ETC obtenues en fonction de la position de l'inclusion lors de la résolution du problème direct et lors de la résolution du problème inverse, dans un cas de résolution hybride de glissement partiel avec 12 % d'erreur. Si l'axe des x de la figure 6.20 représente la position du centre de l'inclusion par rapport au centre du spécimen, il est clair que plus l'inclusion est centrée dans le spécimen, plus la position de l'inclusion s'approche de 0 cm alors que plus l'inclusion s'approche de la surface supérieure, plus sa position s'approche de 1,6 cm.

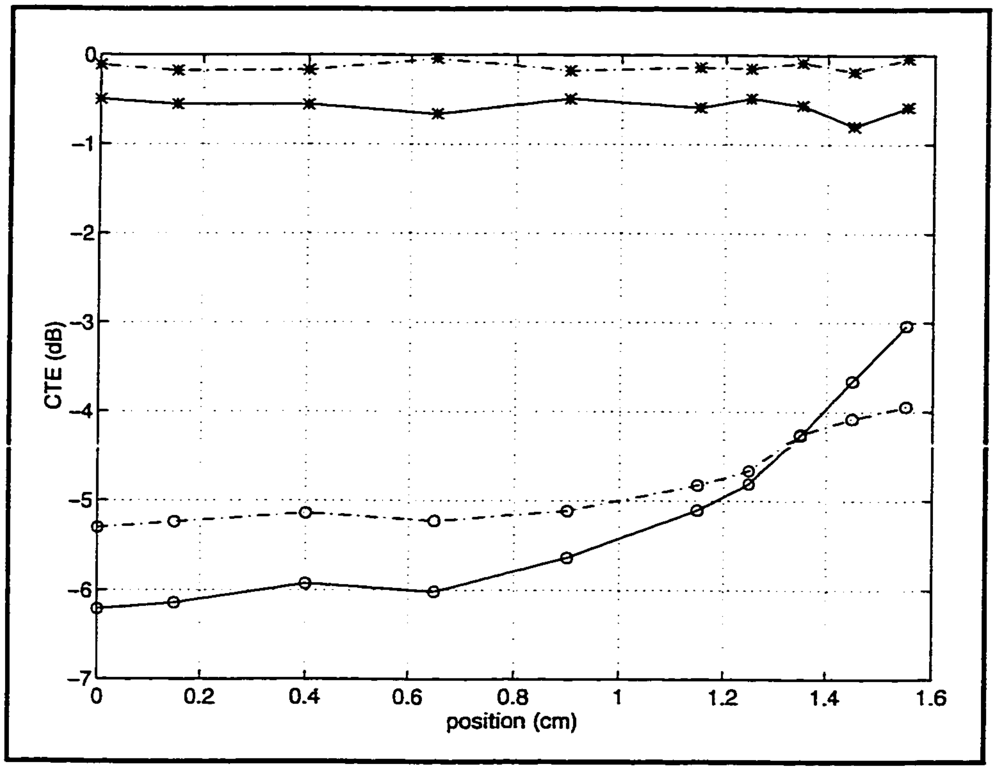


Figure 6.20 : ETC obtenue sur des images de rigidité et de déformation pour différentes positions de l'inclusion.
La position indique la distance du centre de l'inclusion en fonction du centre du spécimen, dans un cas où le contraste est de 4. Les courbes (ooo) représentent l'ETC obtenue sur un élastogramme conventionnel et (***) sur une image de rigidité. (——) représente un cas de résolution hybride avec 12 % d'erreur sur les conditions aux frontières de glissement et (-·-·-) rerprésente des conditions aux frontières de glissement pur.

Les deux courbes reliées aux images de déformation (ooo) présentées sur la figure 6.20 nous informent que plus l'inclusion s'approche de la frontière, plus les valeurs d'ETC augmentent. Aussi, pour des cas d'inclusions très près de la frontière, il semblerait que les conditions aux frontières de quasi-glissement donnent une ETC supérieure à celle obtenue pour un cas de glissement pur. Ces comportements peuvent s'expliquer par l'effet des conditions aux frontières sur les images de déformation.

Normalement, dans un cas d'inclusion dure, l'image de déformation présente des concentrations de contrainte autour de l'inclusion. Ces zones de concentration de contrainte apparaissent sur les élastogrammes sous forme de zones de grandes déformations autour de l'inclusion.

Nous avons vu à la section 6.2.1 que les conditions de quasi-glissement se manifestent sur les élastogrammes par une sous-estimation générale de la déformation. Ainsi, lorsque l'inclusion s'approche de la frontière, la zone de concentration de contrainte située au dessous de l'inclusion s'élargie et la moyenne de la déformation de l'arrière-plan est donc augmentée. Ceci résulte donc en un contraste observé qui s'approche un peu plus du vrai contraste, ce qui procure une ETC supérieure. Ces explications justifient donc l'augmentation de l'ETC en fonction de la position de l'inclusion sur les images de déformation.

L'augmentation encore plus marquée de l'ETC pour une inclusion près de la frontière dans un cas de quasi-glissement peut s'expliquer par le fait que, dans ce cas, en plus d'augmenter une zone de haute déformation, les conditions de quasi-glissement sont associées à la création de régions de sous-estimation de déformation près des frontières (voir section 6.2.1). Si l'inclusion est située dans cette zone, la valeur moyenne de déformation de l'inclusion est donc diminuée. Ces deux comportements ont tendance à augmenter le contraste normalement observé sur les image de déformation dans un cas d'inclusion dure.

Les courbes d'ETC obtenues sur des images de rigidité (***) présentées à la figure 6.20 montrent que, dans un cas de PI ordinaire, la position de l'inclusion ne semble avoir aucun effet sur l'ETC. Nous savons par le biais des résultats obtenus dans la section

(6.2.1) que, dans un cas de résolution ordinaire, les conditions aux frontières n'ont pas d'effet sur les images de rigidité. Ainsi, dans des cas de simulation, l'ETC ne devrait pas varier en fonction de la position de l'inclusion. D'ailleurs, sur la figure 6.21, qui représente le graphique des erreurs relatives en fonction de la position de l'inclusion, il est possible de remarquer que l'erreur relative de l'inclusion et de l'arrière-plan est très faible et relativement constante, quelle que soit la position de l'inclusion.

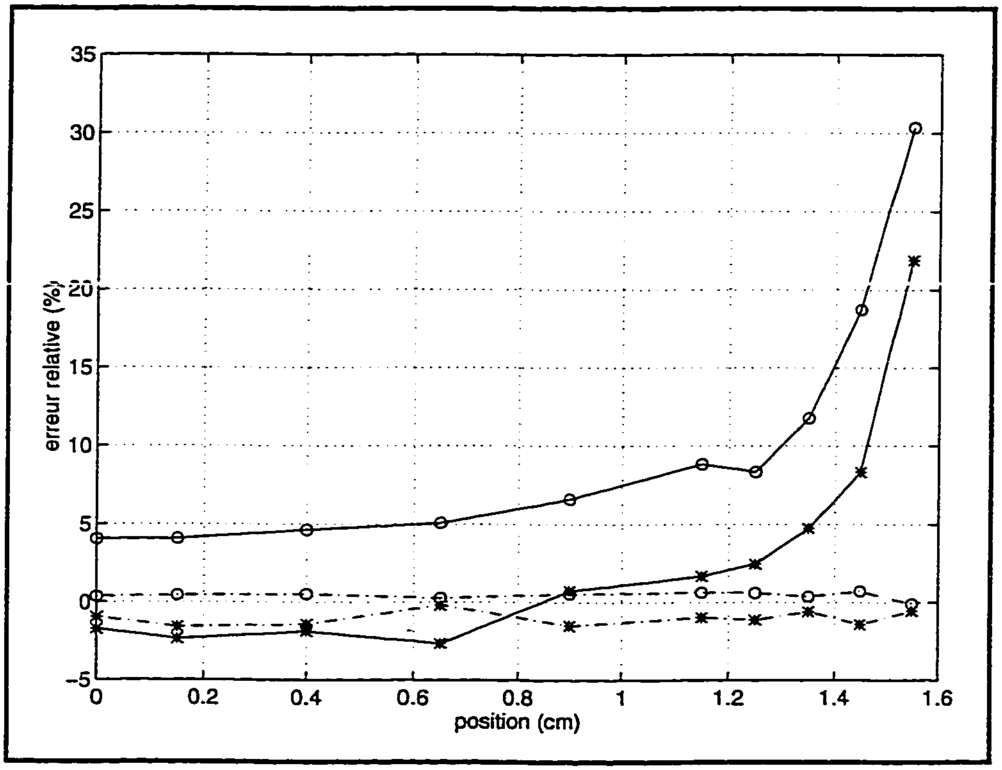


Figure 6.21 : Courbes des erreurs relatives en fonction de la position de l'inclusion.
La position indique la distance entre le centre de l'inclusion et le centre du spécimen, dans un cas où le contraste est de 4. Les courbes (ooo) représentent les erreurs relatives de rigidité retrouvées sur l'arrière-plan et (***) les erreurs relatives de rigidité retrouvées sur les inclusions. (——) représente un cas de résolution hybride avec 12 % d'erreur sur les conditions aux frontières de glissement et (–·–·–) représente des conditions aux frontières de glissement pur pour une résolution ordinaire.

Dans un cas de résolution hybride, les conditions aux frontières ont pour effet de surestimer la rigidité des zones à proximité des frontières (figure 6.13). D'ailleurs, sur la figure 6.21, il est possible de remarquer que la surestimation de l'inclusion augmente au fur et à mesure que l'inclusion s'approche de la frontière supérieure. Notons aussi que la rigidité de l'arrière-plan tend à être surestimée lorsque l'inclusion s'approche de celle-ci. La figure 6.21 démontre aussi clairement que dans le cas d'une résolution hybride les erreurs relatives de l'arrière-plan et de l'inclusion ne sont pas constantes mais gardent la même tendance pour l'arrière-plan et l'inclusion. C'est ce qui peut expliquer le comportement de l'ETC constante dans un cas de résolution hybride (figure 6.20).

6.5 Effet de différents degrés d'erreurs sur les conditions aux frontières de glissement

Le principal but de cette étude est de déterminer l'effet des erreurs sur les conditions aux frontières dans la résolution du problème inverse en élastographie. Maintenant que les effets des erreurs sont bien compris, il ne reste plus qu'à vérifier jusqu'à quel point il est possible de faire une erreur sur les conditions aux frontières sans que les résultats ne soient trop affectés. Des simulations de conditions expérimentales ont permis d'introduire volontairement des erreurs sur les conditions aux frontières du modèle nécessaire à la résolution du problème inverse (résolution hybride). Ces simulations ont permis d'obtenir une courbe d'ETC en fonction de divers pourcentages d'erreurs sur les conditions aux frontières. La résolution hybride a été faite pour un cas de quasi-glissement ainsi que pour une direction d'application de force quasi orthogonale.

6.5.1 Cas hybride de quasi-glissement

La figure 6.22 montre les résultats obtenus pour l'ETC associée à différents pourcentages d'erreurs sur les conditions aux frontières de glissement dans un cas où le contraste entre l'arrière-plan et l'inclusion est de deux. Pour les résolutions hybrides, les conditions aux frontières du modèle correspondent à des conditions idéales de glissement pur, alors que les conditions aux frontières des simulations expérimentales correspondent à des conditions de glissement partiel.

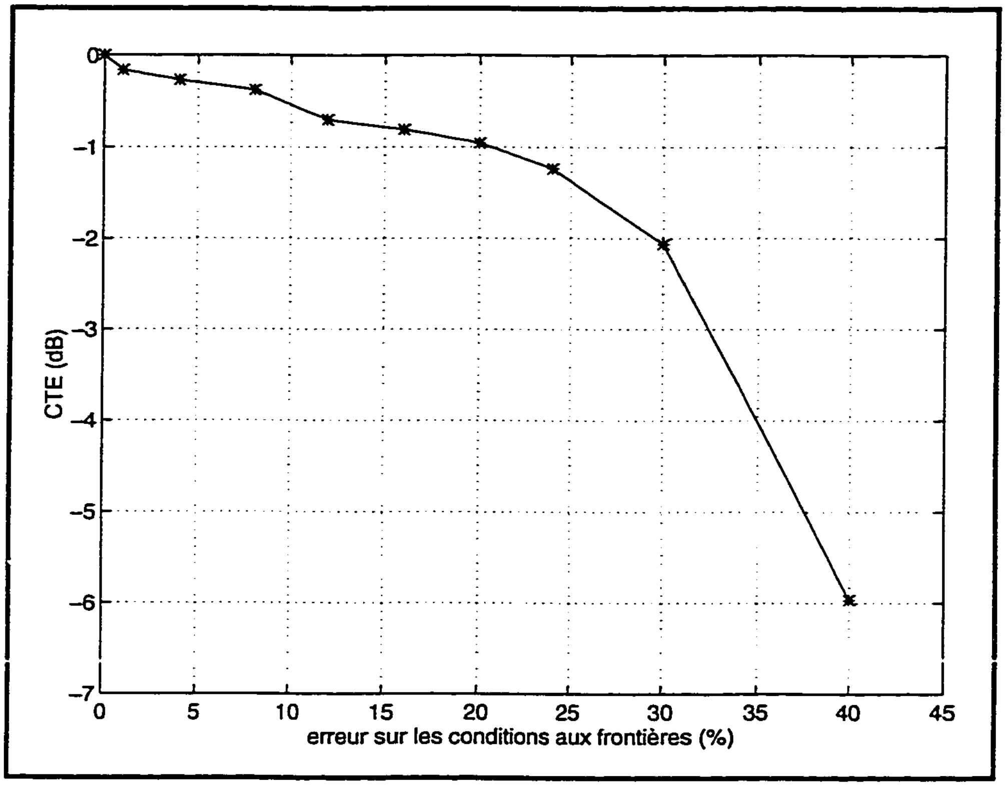


Figure 6.22 : Courbes d'efficacité de transfert de contraste tracées en fonction de divers pourcentages d'erreurs sur les conditions de glissements.
Le calcul du pourcentage d'erreur se trouve à l'équation 5.1.

Sur la figure 6.22, il est possible d'observer que l'ETC de l'image de rigidité n'est pas trop affectée pour des pourcentages d'erreurs variant de 0 à 20 %, alors que pour un cas d'erreur supérieure à 20 %, l'ETC se dégrade drastiquement. Ces résultats peuvent d'ailleurs être confirmés par le graphique de la figure 6.23 sur lequel les erreurs relatives de la rigidité de l'arrière-plan et de l'inclusion sont exprimées en fonction des pourcentages d'erreurs sur les conditions aux frontières. En effet, il est possible de remarquer que pour une erreur sur les conditions aux frontières de glissement supérieure à 20 %, il y a une augmentation radicale dans la surestimation de la rigidité de l'arrière-plan et dans la sous-estimation de la rigidité de l'inclusion.

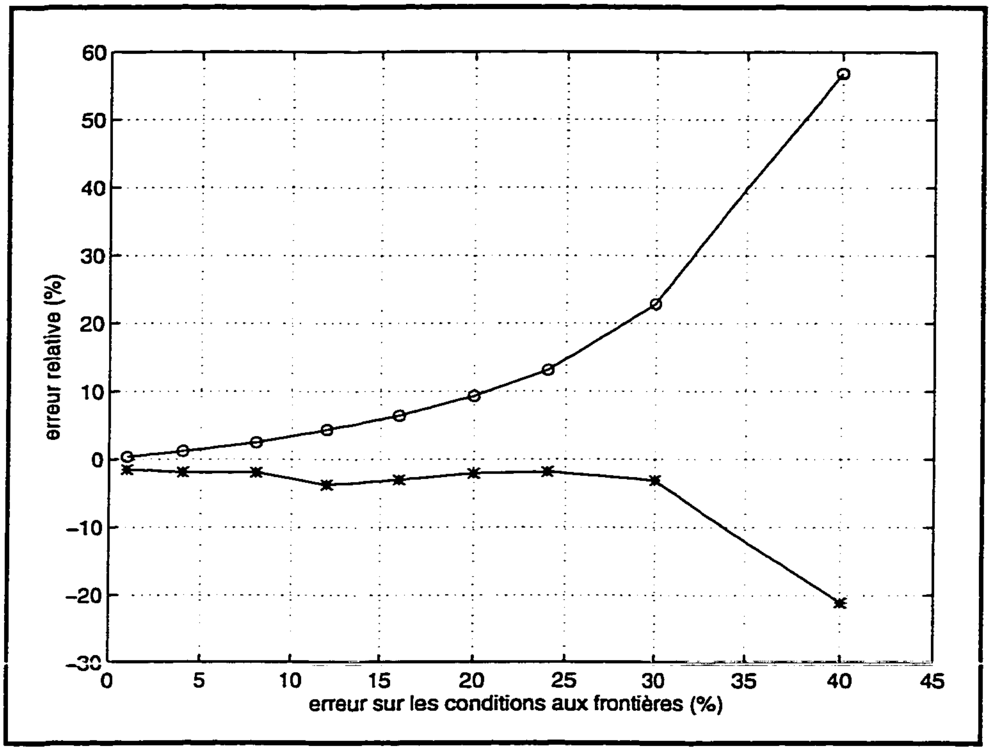


Figure 6.23 : Erreur relative sur les images de rigidité dans un cas de résolution hybride de glissement.
(ooo) représente les erreurs relatives de rigidité faites sur l'arrière-plan et (***) représente les erreurs relatives de rigidité faites sur l'inclusion. Notons que la courbe de résultats obtenus pour la méthode des éléments finis se rapproche de plus en plus de la méthode analytique au fur et à mesure que le nombre d'éléments augmente.

6.5.2 Cas hybride de quasi-orthogonalité

Dans cette partie de l'étude, les conditions aux frontières de la surface inférieure correspondent à des conditions de non-glissement pur pour le modèle et pour les simulations expérimentales. Par contre, sur la surface supérieure du modèle, on suppose que la direction d'application de la force de compression est parfaitement perpendiculaire à la surface supérieure du modèle, alors que pour les simulations expérimentales, la direction d'application de la force correspond à un cas de quasi-orthogonalité. La figure 6.24 représente l'ETC obtenue lors de la résolution hybride de quasi-orthogonalité pour divers degrés d'erreurs. Cette figure montre qu'il est possible de faire jusqu'à environ 5 % d'erreurs sur la direction d'application de la force avant que l'ETC soit grandement affectée.

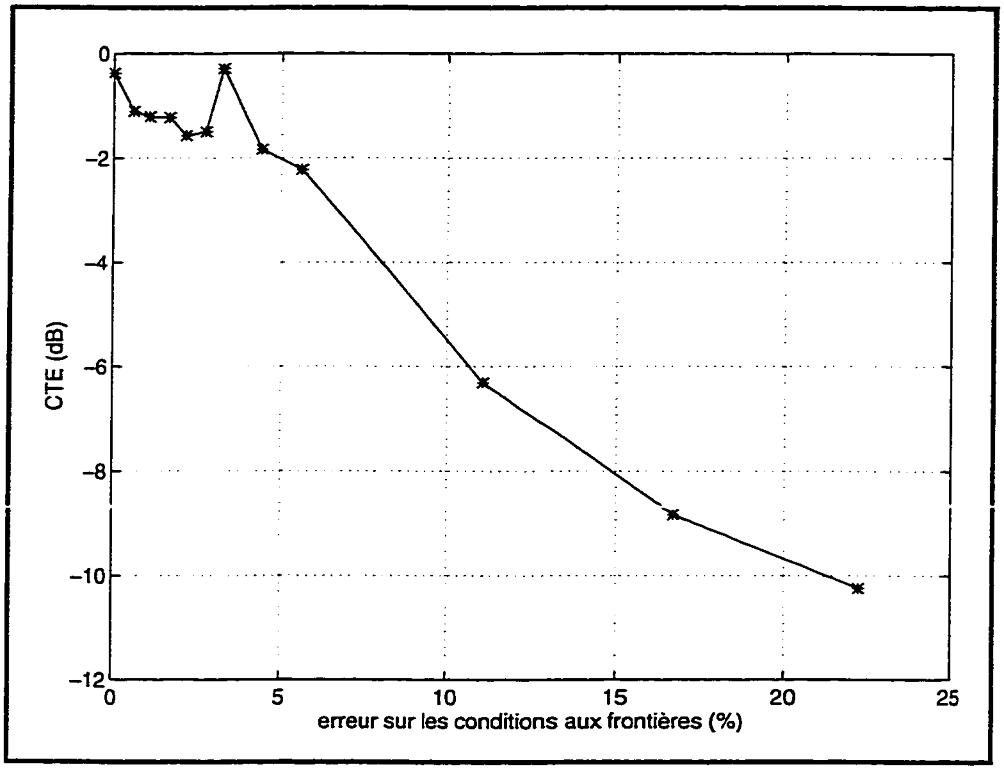


Figure 6.24 : Courbes d'efficacité de transfert de contraste en fonction de divers pourcentages d'erreurs sur les conditions de direction d'application de la force.

Encore une fois, le graphique (figure 6.25) illustrant les pourcentages d'erreurs relatives de l'arrière-plan et de l'inclusion pour différents pourcentages d'erreurs dans la direction d'application de la force confirme les résultats. En effet, sur la figure 6.25, il est possible d'observer une augmentation radicale de la sous-estimation de la rigidité de l'inclusion et de la surestimation de la rigidité de l'arrière-plan pour une erreur sur les conditions aux frontières de direction d'application de la force qui dépasse 5 %.

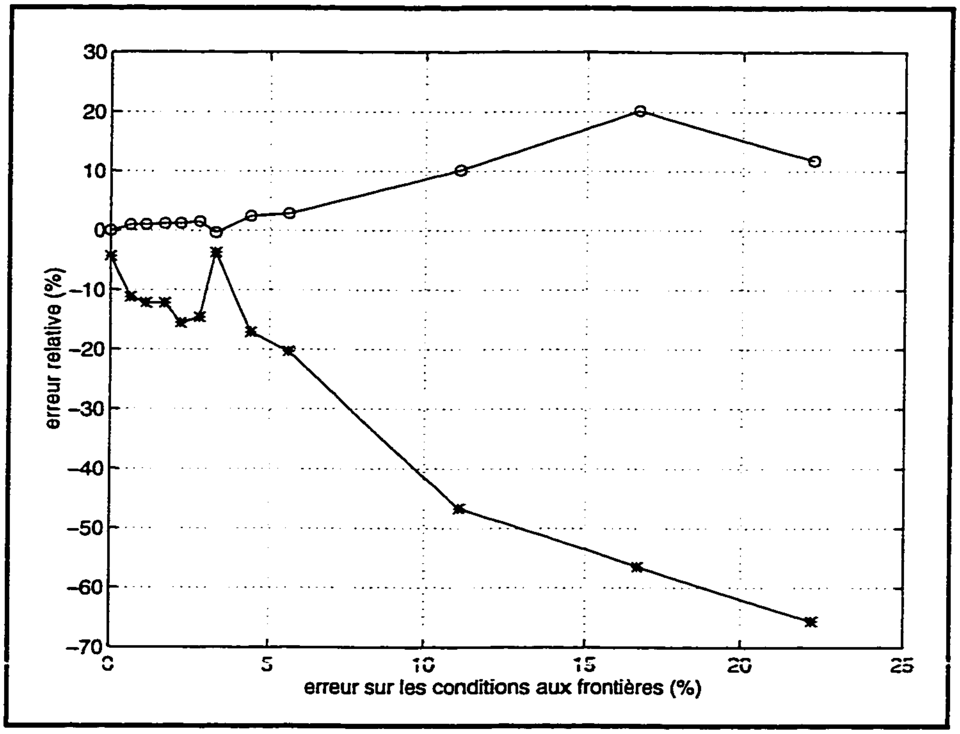


Figure 6.25 : Erreur relative sur les images de rigidité dans un cas de résolution hybride de direction d'application de la force.
(ooo) représente les erreurs relatives de rigidité faites sur l'arrière-plan et (***) représente les erreurs relatives de rigidité faites sur l'inclusion.

6.6 Résolution de maillage non adapté

Les études préliminaires de la résolution du problème inverse effectuée à l'aide d'un maillage non adapté ont permis d'obtenir le type de reconstruction présentée à la figure 6.24 pour des conditions aux frontières idéales (glissement pur et force orthogonale). La reconstruction est assez fidèle même si le contraste observé sur l'image (b) est sous-estimé.

Notons aussi que nous avons éprouvé certains problèmes d'instabilité de solution dans des conditions de déplacements contrôlés. Ces instabilités rendent donc impossible la détection des inclusions puisque la valeur moyenne de l'arrière-plan peut, dans certains cas, être jusqu'à 10^4 fois plus élevée qu'elle ne devrait l'être en réalité.

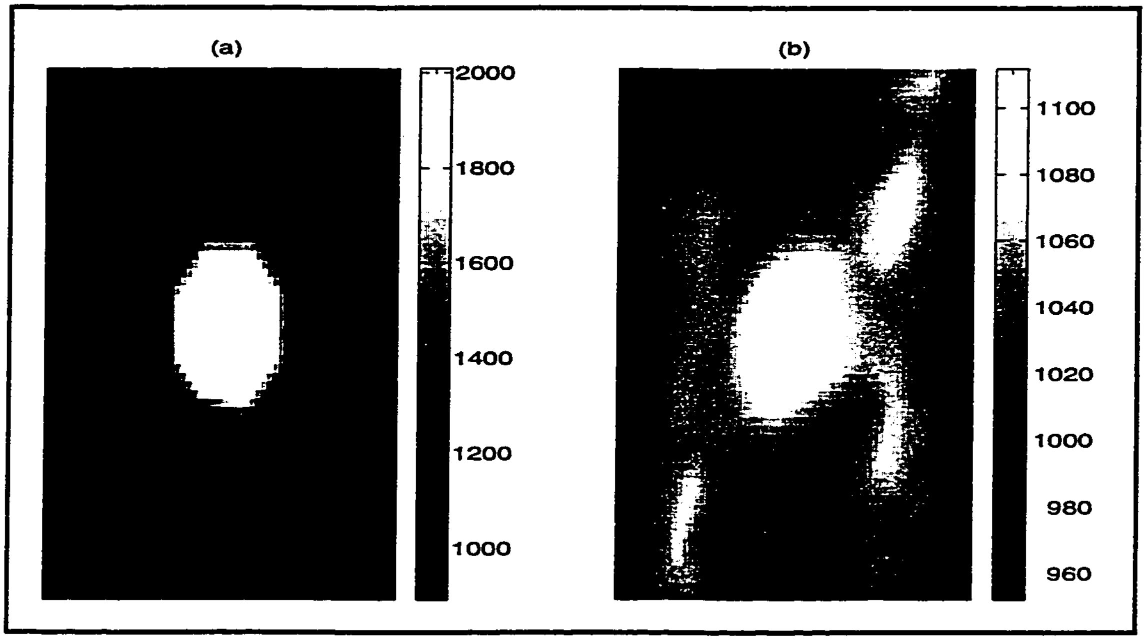


Figure 6.24 : Images de rigidité.
L'image (a) représente l'image idéale qui devrait correspondre à l'image (b).

7 Discussion

7.1 Expériences simulées

Le but principal de cette étude est de déterminer l'effet d'une incertitude sur les conditions aux frontières dans la résolution du problème inverse en élastographie. Il est démontré lors de la première partie de l'étude que la résolution du problème inverse (PI) peut, dans certains cas, être très sensible aux incertitudes sur les conditions aux frontières. La reconstruction de la rigidité est particulièrement difficile dans un cas où la méthode d'optimisation choisie est celle de Gauss-Newton régularisée. Les résultats montrent que, lorsque la reconstruction est possible, les images sont très bruitées; ainsi même avec une bonne ETC la détection est très difficile.

Par contre, la résolution du PI semble moins sensible aux incertitudes sur les frontières lorsque la méthode de Levenberg-Marquardt est utilisée. Cette méthode est très robuste et, comme nous l'avons vu au chapitre 4, elle peut être interprétée comme un compromis entre la méthode de Gauss-Newton et la méthode du gradient. Avec l'utilisation de la méthode de Levenberg-Marquardt, il est possible de voir une amélioration marquée dans la détection de nodule, que ce soit pour un cas de résolution du PI hybride de glissement ou pour un cas de résolution hybride dans la direction d'application de la force. De plus, grâce à la modification qui a été apportée à la méthode de Levenberg-Marquardt, les problèmes de surestimation rencontrés sur certains éléments situés principalement autour de l'inclusion et aux frontières ont été réduits. En effet, la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée requiert une matrice de corrélation qui permet d'ajouter de l'*a priori* sur les valeurs de rigidité. Cet ajout permet d'éviter qu'un triangle du maillage ne prenne une valeur trop éloignée de celle associée aux éléments qui l'entourent.

Bref, à la lumière des résultats obtenus pour les trois méthodes (Gauss-Newton régularisée, Levenberg-Marquardt et Levenberg-Marquardt modifiée), il ressort que la résolution du PI peut être très sensible aux incertitudes associées aux conditions aux frontières lorsque le système n'est pas bien régularisé. Par contre, même avec une bonne régularisation, on remarque une certaine sensibilité du système dans des cas de conditions de quasi-glissement ou de quasi-orthogonalité. En effet, même avec la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée, les résultats démontrent que la résolution du PI hybride fournit des images de rigidité dont la qualité demeure dépendante des conditions aux frontières.

Cette résolution hybride, qui implique que les conditions aux frontières expérimentales et celles imposées au modèle sont différentes, est effectuée dans le but de voir quel pourcentage d'erreur il est possible d'atteindre avant que la détection soit affectée de manière significative. Dans des cas de résolution hybride, les conditions aux frontières du modèle sont considérées comme idéales, c'est-à-dire des conditions de glissement pur sur les surfaces supérieure et inférieure et une direction d'application de la force de compression parfaitement orthogonale avec la surface supérieure du spécimen. Les conditions expérimentales simulées impliquent, quant à elles, des conditions de quasi-orthogonalité afin de simuler la possibilité que le compresseur ne soit pas parfaitement parallèle à la surface supérieure du spécimen et des conditions de quasi-glissement afin de simuler la possibilité que l'interface peau/compresseur ne présente pas des conditions de glissement pur.

Afin de mieux comprendre l'effet de la résolution hybride sur les images de rigidité, des cas de quasi-glissement pour la résolution du problème direct (PD) et du PI ordinaire ont été étudiés. Notons que, pour le problème inverse (PI) ordinaire, les conditions aux frontières sont les mêmes pour le modèle et pour les simulations expérimentale. Les résultats de ces études ont démontré que l'élastogramme conventionnel est affecté par les conditions de quasi-glissement, puisqu'il existe une sous-estimation générale de la déformation associée à une sous-estimation de déformation encore plus marquée pour les zones contiguës aux frontières inférieure et supérieure. Il est aussi possible de remarquer une légère surestimation de déformation de la zone centrale. Pour leur part, les images de rigidité, obtenues à la suite de la résolution du PI ordinaire, ne semblent pas être affectées par les conditions aux frontières de quasi-glissement.

Le même type d'étude a été effectué avec des conditions de quasi-orthogonalité. Les résultats obtenus pour la résolution du problème direct démontrent qu'il existe aussi une sous-estimation générale de déformation. Les résultats du PI ordinaire démontrent eux aussi que les images de rigidité ne sont pas affectées par une direction d'application de force non orthogonale.

Bref, ces résultats démontrent que, dans un cas de résolution du PI ordinaire, les images de rigidité ne sont pas sensibles aux conditions aux frontières, alors que les images de déformation obtenues par la résolution du problème direct le sont. D'ailleurs, ces surestimations et sous-estimations présentes lors de la résolution du problème direct entraînent des contrastes observés artificiellement supérieurs ou artificiellement inférieurs selon le type d'inclusion. Ce comportement a permis de découvrir que certaines hypothèses de base de l'équation de l'ETC ne sont pas valables pour des conditions de quasi-glissement ou de quasi-orthogonalité.

L'élaboration d'une équation plus générale nous a permis d'éliminer le problème d'ETC supérieure à 100 % rencontré uniquement sur des images de déformation dans les cas où les conditions aux frontières sont les mêmes pour le modèle et les simulations expérimentales. Notons que, dans les cas de résolutions du PI hybride, ce problème est rencontré sur les images de déformation et de rigidité. En effet, les résultats démontrent que les incertitudes incorporées dans le système par l'introduction d'erreur dans les conditions aux frontières du modèle résultent en des images de rigidité dépendantes des conditions aux frontières. Par exemple, les images de rigidité provenant des conditions hybrides de glissement sont caractérisées par des zones de surestimation de rigidité dans les régions contiguës aux surfaces supérieure et inférieure. Pour sa part, la résolution du

PI hybride dans la direction d'application de la force produit des images de rigidité avec une zone de sous-estimation de rigidité d'un coté du spécimen et une zone de surestimation de rigidité de l'autre coté.

Ces surestimations de rigidité ont des répercussions sur les courbes d'ETC, tout comme cela a été le cas lorsque ce même phénomène a été rencontré sur les images de déformation lors de la résolution du problème direct. En fait, grâce à ces zones de surestimations, la résolution hybride produit des contrastes observés artificiellement sous-estimés pour les inclusion dures et artificiellement surestimés pour les inclusions molles.

Les résultats obtenus démontrent que l'étude des pourcentages d'erreurs relatives de rigidité effectuée en parallèle avec l'étude d'ETC aide à la compréhension du comportement de la résolution du PI hybride. En effet, cette évaluation a permis d'observer que, pour un cas de résolution hybride de glissement, les erreurs relatives de rigidité pour l'inclusion et l'arrière-plan sont toujours supérieures à celles obtenues lors de la résolution du PI ordinaire et ce, même si l'ETC de la résolution du PI hybride est parfois supérieure. Ce phénomène d'ETC artificiellement supérieure est principalement dû au fait que la résolution du PI hybride de glissement donne lieu à une surestimation marquée de rigidité dans l'arrière-plan. Cette surestimation de rigidité fait donc augmenter la valeur moyenne de la rigidité de l'arrière-plan, et la surestimation du contraste normalement observé sur les images de rigidité dans un cas d'inclusion molle est réduite. Dans un cas de résolution hybride dans la direction d'application de la force, il n'existe aucune surestimation marquée de l'arrière-plan et, dans ce cas, les ETC inférieures sont associées à des valeurs d'erreurs relatives supérieures.

Ainsi, si le critère de sélection d'une image est le contraste observé sur cette image, les courbes d'ETC peuvent être comparées entre elles. Par contre, si en plus d'obtenir un bon contraste, les images doivent refléter la bonne rigidité en valeur absolue, les courbes d'ETC doivent être interprétées avec prudence et peuvent nécessiter l'évaluation parallèle d'un graphe d'erreurs relatives.

Une étude de la variation de position de l'inclusion dans le spécimen a aussi permis de vérifier si les résultats d'ETC sont dépendants de ce paramètre. Les résultats démontrent que, pour les images de rigidité obtenues à l'aide de la résolution du PI ordinaire ou du PI hybride, la profondeur de l'inclusion n'a pas d'effet sur l'ETC. Il faut par contre noter que, dans un cas de PI hybride, plus l'inclusion s'approche de la frontière supérieure plus la rigidité de l'arrière-plan et de l'inclusion est surestimée. Ainsi, pour une inclusion située près de la frontière supérieure, la détection se fait tout aussi facilement que pour un cas d'inclusion centrée dans le spécimen, mais les valeurs absolues de rigidité de l'arrière-plan et de l'inclusion s'éloignent de la réalité.

Maintenant que nous savons que l'ETC de la solution du PI hybride n'est pas dépendante de la profondeur de l'inclusion dans des cas de conditions expérimentales simulées, il est possible d'examiner les courbes d'ETC tracées en fonction du pourcentage d'erreurs sur les conditions aux frontières pour un cas où l'inclusion est centrée dans le spécimen. Les résultats obtenus démontrent qu'il est possible de commettre jusqu'à 20 % d'erreur sur les conditions aux frontières de glissement avant que l'ETC des images de rigidité ne soit affectée de manière significative. Une étude des erreurs relatives confirme d'ailleurs ces résultats puisque c'est aussi à partir de ce seuil de 20 % d'erreur sur les conditions aux frontières de glissement que les erreurs relatives de l'inclusion et de l'arrière-plan augmentent de manière significative.

Les résultats obtenus pour divers pourcentages d'erreurs sur la direction d'application de la force démontrent qu'il est possible de faire jusqu'à 5 % d'erreur avant que l'ETC ne soit trop affectée. Ces résultats ont aussi été étudiés en parallèle avec des courbes d'erreurs relatives de rigidité. Encore une fois, ces courbes confirment les résultats obtenus pour l'ETC, puisque pour un pourcentage d'erreur supérieur à 5 % sur les conditions aux frontières de direction d'application de la force, les erreurs relatives de rigidité de l'inclusion et de l'arrière-plan augmentent radicalement.

La marge d'erreur pour les conditions aux frontières de direction d'application de la force est beaucoup plus faible que pour les conditions de glissement. Par contre, il est beaucoup plus simple de corriger une erreur dans la direction d'application de la force qu'une erreur sur les conditions de glissement. Si des études ultérieures démontrent qu'il est impossible d'effectuer des compression de tissu mammaire avec une direction d'application de la force impliquant des angles qui varient entre 90° et 85° par rapport à la surface supérieure du tissu, des modifications mécaniques du système pourront être envisagées. Une solution très simple serait de remplacer le compresseur fixe par un compresseur mobile maintenu à l'arbre de compression à l'aide d'un joint universel.

Pour ce qui est de la marge d'erreur associée aux conditions de glissement, il serait surprenant que les conditions expérimentales ne puissent être contrôlées de manière à être dans l'impossibilité d'obtenir des conditions de glissement en deçà de ce seuil de 20% d'erreur. Par contre, si tel était le cas, il serait possible d'envisager des changements au point de vue du système mécanique ou au point de vue théorique. Par exemple, il serait possible d'inclure des forces latérales inconnues lors de la résolution à l'aide des éléments finis. Une fois ces forces déterminées, elles pourraient être ajoutées comme conditions aux frontières du modèle, ce qui permettrait de se retrouver dans un cas de résolution de PI ordinaire et non de PI hybride. Il serait aussi possible d'envisager l'ajout de surfaces rugueuses sur le compresseur et la table d'appui afin de s'approcher du non glissement pur. Notons par contre que les images d'élastogrammes conventionnelles sont affectées par les conditions aux frontières, et les conditions aux frontières idéales sont les conditions de glissement pur. Ainsi, l'ajout de surfaces rugueuses pourraient réduire le problème de conditions aux frontières hybrides et améliorer les images de rigidité, mais elles auraient l'effet contraire sur les images de déformations.

Étant donné que ce projet a été effectué dans le but éventuel de pouvoir appliquer la résolution du problème inverse à des images cliniques, des essais préliminaires de résolution du PI ordinaire ont été faits à l'aide d'un maillage non adapté. Ce processus permet de simuler parfaitement des cas où la position de l'inclusion dans le domaine étudié est totalement inconnue. Les résultats des essais préliminaires sont très prometteurs puisqu'ils démontrent que la reconstruction de la rigidité à l'aide d'un maillage non adapté est possible même si l'ETC semble un peu faible.

7.2 Améliorations possibles

Plusieurs améliorations pourraient être envisagées afin de bonifier la technique de reconstruction utilisée dans ce mémoire. Les trois améliorations ayant le plus d'impact sur la qualité des images ont été soulevées. Une amélioration de la technique d'élimination des modules négatifs pourrait repousser le problème de convergence artificielle parfois rencontré lors de la résolution du PI. En effet, la méthode décrite dans la section 4.3 peut, dans certains cas, résulter en une valeur de ΔE très faible. Ce problème est rencontré lorsqu'une détection de module négatif est faite pour un grand nombre d'ajustements de gain (α). Ainsi, avec un ΔE très faible pour un certain nombres d'itérations consécutives, on croit atteindre une convergence, alors qu'en réalité, la faible valeur associée au ΔE est causée par une trop faible valeur du gain α. Le problème de convergence artificielle associé au problème de correction de rigidité négative pourrait être en grande partie réglé non pas par une correction générale du ΔE mais bien par un ajustement local. Par exemple, la correction locale pourrait être effectuée à l'aide d'un changement de valeur de module d'Young pour l'élément concerné en lui attribuant simplement la valeur moyenne des éléments qui l'entourent.

L'autre amélioration possible concerne la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée pour laquelle une matrice de corrélation permet d'ajouter de l'*a priori* sur les valeurs de rigidité du domaine étudié. Présentement, la corrélation est effectuée en introduisant une distribution gaussienne sur chacun des éléments du maillage. Cette distribution gaussienne est appliquée selon la position du centre de masse des triangles. Ainsi, un petit triangle ou un gros triangle dont le centre de masse est à égale distance d'un élément ont autant d'effet l'un que l'autre sur l'élément en question. Il serait plus adéquat de calculer par exemple la superficie des triangles et de leur donner un poids correspondant lors du calcul de la matrice de corrélation.

Une autre amélioration possible du système serait d'introduire dans le modèle d'éléments finis des conditions qui pourraient tenir compte d'un certain mouvement de rotation de l'inclusion lors de la compression du spécimen. Cette amélioration permettrait de d'examiner le comportement d'une tumeur bien circonscrite non ancrée au tissu environnant comparativement à celui obtenu pour des tumeurs vascularisées pour lesquelles la rotation n'est pas permise. Une avenue intéressante pour ce problème serait d'introduire autour de l'inclusion des ressorts d'une rigidité plus ou moins élevée selon que l'inclusion est ancrée ou non dans le milieu environnant.

8 Conclusion

Dans la première partie de ce projet, nous avons pu constater que les techniques de dépistage du cancer du sein présentement utilisées ont leurs limites, et c'est pourquoi tant d'ingénieurs et de médecins sont à la recherche de nouvelles techniques qui pourraient s'ajouter aux méthodes de détection actuelles. Dans ce travail, l'élastographie est présentée comme une méthode qui pourrait éventuellement être adoptée par des radiologues afin de facilité le diagnostic du cancer du sein.

Ce travail nous a permis d'évaluer l'élastographie et d'exposer les avantages, les inconvénients et les lacunes de cette technique. Il a d'ailleurs été démontré que les principaux problèmes rencontrés sur les élastogrammes conventionnels peuvent être évités grâce à la résolution du problème inverse. La résolution du problème inverse est une technique itérative qui requiert l'utilisation d'un modèle mécanique ainsi que l'utilisation de la méthode des éléments finis. Cette technique de reconstruction de rigidité nécessite aussi une méthode d'optimisation adéquate et une bonne connaissance des conditions aux frontières imposées au spécimen. Afin de pouvoir résoudre le plus efficacement possible le problème inverse en élastographie, les conditions aux frontières imposées au modèle doivent être les mêmes que les conditions aux frontières expérimentales. Par contre, étant donné qu'il est très difficile de contrôler parfaitement les conditions aux frontières expérimentales, il existe inévitablement des différences entre les conditions aux frontières imposées au modèle et celles imposées aux simulation expérimentales.

Ainsi, il a donc été nécessaire de développer les conditions de quasi-glissement et de quasi-orthogonalité capables de simuler des situations réelles dans lesquelles les conditions aux frontières ne sont pas parfaitement contrôlables. Ces conditions aux frontières ont pu ensuite être utilisées dans la résolution du problème inverse hybride employé pour simuler une reconstruction d'images cliniques. Ceci nous a donc amené à vérifier si les incertitudes reliées aux conditions aux frontières ont un impact sur la qualité de la reconstruction de rigidité. Les résultats ont démontré que la résolution du problème inverse est très sensible aux incertitudes associées aux conditions aux frontières. Cette sensibilité est davantage marquée dans des cas où la régularisation n'est pas adéquate.

Grâce à l'étude du comportement de la résolution du problème inverse hybride effectuée à l'aide de trois méthodes d'optimisation différentes, il a été possible de sélectionner la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée pour sa capacité à converger vers la solution même dans des cas de résolution hybride.

Des effets bien précis de la résolution du problème direct en conditions de quasi-glissement ou de quasi-orthogonalité et de la résolution du problème inverse hybride ont été identifiés et expliqués. D'ailleurs, dans le cadre du présent projet, nous avons réussi à déterminer des valeurs seuils indiquant un pourcentage d'erreurs maximales toléré sur les conditions de glissement et sur la direction d'application de la force au delà duquel la qualité de la détection est affectée significativement. Ainsi, pour des cas de simulation, un maximum d'environ 20 % d'erreur est toléré sur les conditions aux frontières de glissement et un maximum d'environ 5 % d'erreur est toléré sur la direction d'application de la force avant que la qualité de la détection soit dégradée significativement.

Il est également nécessaire de souligner que l'étude préliminaire concernant la résolution du problème inverse à l'aide d'un maillage non adapté nous indique que l'utilisation de la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée semble convenir à ce type de situation. Par contre, les problèmes de reconstruction rencontrés lors des test préliminaires dans des situations de déplacements contrôlés restent à être clarifiés.

Ainsi, le développement de conditions aux frontières capables de simuler les situations d'incertitudes expérimentales, l'élaboration d'une technique d'optimisation capable de satisfaire nos besoins, l'étude détaillée des effets des conditions de quasi-glissement et de quasi-orthogonalité sur les images de déformation et de rigidité, l'étude de l'effet de la résolution hybride sur ces mêmes images et finalement la détermination de valeurs seuils représentant le pourcentage d'erreurs maximum toléré au delà duquel les images sont affectées significativement constituent les étapes que nous avons accomplies afin d'atteindre les objectifs que nous nous étions préalablement fixés. D'autres étapes préliminaires doivent par contre encore être franchis avant l'obtention d'une image de rigidité du tissu mammaire.

En effet, avant de pouvoir appliquer la résolution du problème inverse sur les images cliniques, il faudrait tout d'abord être en mesure de déterminer les valeurs seuils dans des cas de déplacement contrôlé. Ensuite, il serait important de vérifier l'effet de l'ajout du bruit sur les données de déplacement lors de la résolution du problème inverse hybride. Idéalement, des études ultérieures pourraient permettre la vérification expérimentale du pourcentage d'erreurs possible sur les conditions aux frontières, ce qui permettrait d'examiner si les conditions aux frontières expérimentales sont assez stables et bien contrôlées pour se situer à l'intérieur de la plage d'erreurs admissibles.

À la suite de ce travail et des études proposées, qui constituent un prolongement logique de cet ouvrage, il est raisonnable de croire que, d'ici peu, des images de rigidité construites à partir de données cliniques pourront être présentées. Ces images pourraient faciliter la tâche des médecins dans le diagnostic de cancers du sein, moyennant quelques améliorations apportées à la technique. Par exemple, une amélioration dans la vitesse de traitement des données nécessaire à la résolution du problème inverse pourrait permettre au médecin d'utiliser ces images à l'intérieur d'un laps de temps raisonnable après l'acquisition des données. Finalement, l'utilisation d'un modèle de déformation 3D pourrait permettre non pas la construction d'une image de rigidité mais bien la construction d'un volume de rigidité grâce auquel il serait possible de situer la tumeur dans l'espace de façon précise.

9 Bibliographie

ATESHIAN, G.A., WARDEN, W.H., KIM, J.J., GRELSAMER, R.P., MOW, V.C. (1997). Finite deformation biphasic material properties of bovine articular cartilage from confined compression experiments, J.Biomechanics, 30(11/12), 1157-1164.

BATOZ, J.-L., DHATT, G. (1990). Modélisation des structures par éléments finis. Hermes.

BUNDAY, B. (1984). Basic optimisation method. Edward Arnold.

BRANHAM, R.L. jr. (1990). Scientific data analysis : an introduction to overdetermined system. Springer Verlag.

BRONZINO, J.D. (1993). The biomedical engineering handbook. CRC.

CÉSPEDES, I., OPHIR, J. (1993). Reduction of image noise in elastography. Ultrasonic Imaging, 15, 89-102.

CHATURVEDI, P., INSANA, M.F., HALL, T. (1997). Two dimensional companding for noise reduction in elastography. IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr., *submitted*.

CHEN, E.J., NOVAKOVSKI, J., JENKINS, W.K., O'BRIEN Jr., D. (1996). Young's modulus measurements of soft tissues with application to elasticity imaging. IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr., 43(1), 191-194.

CHRISTENSEN, D.A. (1988). Ultrasonic Bioinstrumentation, John Wiley and sons.

CONANT, E.F., MAIDMENT, A.D.A. (1996). Breast cancer imaging. Science and medecine, jan./feb., 22-31.

COOK, R., MALKUS, D.S., PLESHA, M.E. (1989). Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley and sons.

DEMOMENT, G. (1989). Image reconstruction and restoration: overview of the common estimation structures and the problems. IEEE Trans. Accoust., Speech, Signal Processing, 37(12), 2024-2036.

EMILIANOV, S.Y., SKOVORODA, A.R., LUBINSKI, M.A., O'DONNELL, M. (1995). Reconstructive elasticity imaging. Accoustical imaging, 21, 241-252.

FLAX, S.W., O'DONNEL, M. (1988). Phase aberration correction using signals from point reflectors and diffuse scatterers: basic principles. IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr., 35(6), 758-767.

FLETCHER, R. (1980). Practical methods of optimization. Wiley Interscience.

FUNG, Y.C. (1993). Biomechanics, mechanical properties of living tissues. Springer Verlag.

GAGNON, H. (1997). Application de la tomographie d'impédance électrique à la résolution du problème inverse en électrocardiographie. Thèse de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.

GALLAGHER, R.H. (1976). Introduction aux éléments finis. Prentice-Hall.

GOLUB,G.H., HEATH, M., WAHBA, G. (1979). Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. Technometrics, 21(2), 215-223.

GOUSSARD, Y., (1996). Traitements de signaux biomédicaux : cours GBM6103. (polycopié, École Polytechnique de Montréal).

GRANDIN, H. Jr. (1986). Fundamentals of the finite element method. MacMillian Publishing Company.

HEIN, I.A., O'BRIEN, W.D., (1993). Current time-domain methods for assessing tissue motion by analysis from reflected ultrasound echoes-- A review. IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr., 40(2), 84-102.

HONEIN, T., HERMAN, G. (1990). On bonded inclusions with circular or straight boundaries in plane elastostatics. Trans.ASME Journ. of Applied Mech., 57, 850-856.

KALLEL, F., BERTRAND, M., OPHIR., J., CÉSPEDES, I. (1995). Determination of elasticity distribution in tissue from spatio-temporal changes in ultrasound signals. Accoustical Imaging, 21, 433-443.

KALLEL, F., BERTRAND, M., OPHIR, J., CÉSPEDES, I. (1996a). Advances in tissue elasticity reconstruction using linear peturbation method. Accoustical Imaging, 22, 267-277.

KALLEL, F., BERTRAND, M. (1996b). Tissue elasticity reconstruction using linear perturbation method. IEEE Trans. on Medical Imaging, 15(3), 299-313.

KALLEL, F., BERTRAND, M., OPHIR, J. (1996c). Fundamental limitations on the contrast-transfer efficiency in elastography: an analytical study. Ultrasound in Med. & biol., 22(3), 463-470.

KOCUR, C.M., ROGERS, S.K., MYERS, L.R., BURNS, T., KABRISKY, M., HOFFMEISTER, J.W., BAUER, K.W., STEPPE, J.M. (1996). Using neural networks to select wavelet features for breast cancer diagnosis. IEEE Engineering in Medecine and Biology, May/June, 95-101.

KONOFAGOU, E., DUTTA, P., OPHIR, J., CÉSPEDES, I. (1996) Reduction of stress nonuniformities by apodization of compressor displacement in elastography. Ultrasound in Med. & Biol., 22(9), 1229-1236.

KROUSKOP, T.A. (1997). A comparision of the compressive stiffness of normal tissues from the breast.

KROUSKOP, T.A., DOUGHERTY, D.R., LEVINSON, S.F. (1987). A pulsed Doppler ultrasonic system for making noninvasive measurements of the mechanical properties of soft tissue. J.Rehabil.Res.Dev., 24, 1-8.

KONOFAGOU, E., DUTTA, P., OPHIR, J., CÉSPEDES, I. (1995). Reduction of stress non-uniformities by apodization of compressor displacement in elastography. Ultrasonic Imaging, 17, 50.

KREYSZIG, E. (1993). Advanced engineering mathematics. John Wiley and sons.

LIOTTA, L.A. (1992). Cancer cell invasion and metastasis. American Scientific, Feb., 54-63.

MANIATTY, A., ZABARAS, N., STELSON, K. (1989). Finite element analysis of some inverse elasticity problems. J. Eng. mech., 115(6), 1303-1317.

MARQUARDT, D.W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. J.Soc.Indust.Appl.Math., 11(2), 431-441.

MURRAY, W. (1972). Numerical methods for unconstrained optimization. W. Murray.

NISHIMURA, S., MATSUSUE, S., KOIZUMI, S., KASHIHARA, S. (1992). Architectural distortion of subcutaneous fascial layer in breast tumors: ultrasonographic evaluation. Ultrasound in Med. & biol., 18(10), 815-820.

O'DONNELL, M., SKOVORODA, A. R., SHAPO, B. M., EMILIANOV, S. Y. (1994). Internal displacement and strain imaging using ultrasonic speckel tracking. IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr., 41(3), 314-325.

OPHIR, J., KALLEL, F., VARGHESE, T., BERTRAND, M., CÉSPEDES, I., PONNEKANTI, H. (1997). Elastography: a system approach. Int. Journ. of Imaging System and Tech., 8, 89-103.

OPHIR, J., CÉSPEDES, I., GARRA, B., PONNEKANTI, H., HUANG, Y., MAKLAD, N. (1996). Elastography: ultrasonic imaging of tissue strain and elastic modulus in vivo. European J. of Ultrasound, 3, 49-70.

OPHIR, J., CÉSPEDES, I., PONNEKANTI, H., YAZDI, Y., LI, X. (1991). Elastography: a quantitative method for imaging the elasticity of biological tissues. Ultrasonic Imaging, 13, 111-134.

PONNEKANTI, H., OPHIR, J., HUANG, Y., CÉSPEDES, I. (1995). Fundamental mechanical limitations on the visualisation of the elasticity contrast in elastography. Ultrasound in Med. and Biol., 21(4), 533-543.

PONNEKANTI, H., OPHIR, J., CÉSPEDES, I. (1994). Ultrasonic imaging of the stress distribution in elastic media due to an external compressor. Ultrasound in Med. & biol., 20(1), 27-33.

PONNEKANTI, H., OPHIR, J., CÉSPEDES, I. (1992). Axial stress distributions between coaxial compressors in elastography: an analytical model. Ultrasound in Med. & biol., 18(8), 667-673.

RAGHAVAN, K.R., YAGLE, A.E. (1994). Foward and inverse problem in elasticity imaging of soft tissues. IEEE Trans. on Nuclear Science, 41(4), 1639-1648.

SAADA, A.S. (1989). Elasticity: theory and application. Krieger.

SHAMES, I.H., COZZARELLI, F.A. (1992). Elastic and inelastic stress analysis. Prentice Hall.

SILBERBERG, E., LUBERA, J. (1987). Cancer statistics. Cancer, 39.

SKOVORODA, A.R., EMILIANOV, S.Y., O'DONNELL, M. (1995). Tissue elasticity reconstruction based on ultrasonic displacement and strain images. IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr., 42(4), 747-764.

SKOVORODA, A.R., EMILIANOV, S.Y., LUBINSKI, M.A., SARVAZYAN, A.P., O'DONNELL, M. (1994). Theoritical analysis and verification of ultrasound displacement and strain imaging. IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr., 41(3), 302-312.

SOCIÉTÉ CANADIENNE DU CANCER. (1997). Mammographie et dépistage du cancer du sein chez les femmes de 49 ans et moins : le débat continue. La Presse, 20 mai, A12.

SUMI, C., SUZUKI, A., NAKAYAMA, K. (1995). Estimation of shear modulus distribution in soft tissue from strain distribution. IEEE Trans. on Biomed. Eng., 42(2), 193-202.

TARANTOLA, A. (1987). Inverse problem theory : Methods for data fitting and model parameters estimation. Elsevier Science.

TRAHEY, G.E., FREIBURGER, P.D., WORRELL, S.S. (1993). The speckel 'look back ' technique for 2D array phase aberration correction. Ultrasonic Imaging, 15.

VARGHESE, T., OPHIR, J. (1997a). A theoretical framework for performance characterization of elastography: the strain filter. IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr., 44(1), 164-172.

VARGHESE, T., OPHIR, J. (1997b). Enhancement of echo-signal correlation in elastography using temporal stretching. IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr., 44(1), 173-179.

WAHBA, G. (1985). A comparison of GCV and GML for choosing the smoothing parameter in the generalized spline smoothing problem. The Annals of Statistics, 13, 1378-1402.

WALKER, W.F., TRAHEY, G.E., (1997). Aberrator integration error in adaptive imaging. IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr., 44(4), 780-791.

WATMOUGH, D.J., QUAN, K.M., ASPDEN, R.M. (1993). Breast compression: a preliminary study. J. Biomed. Eng., 15, 121-126.

ANNEXE 1: Estimateur MAP

Si l'on considère qu'on dispose d'un vecteur de déplacement U contenant des incertitudes et si ce déplacement varie linéairement avec la quantité à estimer *e*, on obtient la relation suivante :

$$U = Se + b \tag{10.1}$$

où U est le vecteur de déplacement, *e* l'estimé de la rigidité et b les incertitudes sur le déplacement. De façon générale, on peut supposer que ces incertitudes sont gaussiennes de moyenne nulle. La covariance des incertitudes peut être représentée par $\sigma_b^2 R_b$. On reconnait ici la variance qui représente l'importance des incertitudes et R_b la matrice de covariance normalisée qui traduit la corrélation entre les éléments composant l'incertitude sur le déplacement. Maintenant, l'introduction d'information *a priori* sur la quantité a estimer (*e*) peut se faire en supposant que les valeurs de rigidité se distribuent comme un vecteur aléatoire gaussien de moyenne e_0 et de covariance $\sigma_E^2 R_E$.

La densité conditionnelle des observations (U) est une gaussienne de moyenne *Se* et de covariance $\sigma_b^2 R_b$ (Goussard, 1996). Alors,

$$f_{U|E=e(U)} = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_b^2\right)^{N/2} |R_b|^{1/2}} \exp\left(-\frac{(U-Se)^T R_b^{-1} (U-Se)}{2\sigma_b^2} \right) \tag{10.2}$$

où N représente la taille du vecteur déplacement. La densité *a priori* de la rigidité est, quant à elle, définie comme suit :

$$f_E(e) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_E^2\right)^{N/2} |R_E|^{1/2}} \exp\left(-\frac{(e-e_0)^T R_E^{-1} (e-e_0)}{2\sigma_E^2} \right) \tag{10.3}$$

où *P* représente la taille du vecteur de rigidité.

L'approche de l'estimateur du maximum *a posteriori* (MAP) consiste à choisir, pour l'estimation du déplacement, la valeur la plus probable; c'est-à-dire celle qui maximise la densité de probabilité *a posteriori* de *e* (Goussard, 1996).

$$E_{MAP} = \operatorname{ArgMax}\left\{f_{E|U=U(e)}\right\} \tag{10.4}$$

En appliquant la règle de Bayes on obtient :

$$E_{MAP} = \operatorname{ArgMax}\left\{f_{U|E=e(U)} f_E(e)\right\} \tag{10.5}$$

Maintenant en incorporant *(10.2)* et *(10.3)* dans l'équation précédente on obtient :

$$E_{MAP} = \operatorname{ArgMax}\left\{\exp\left(-\frac{(U-Se)^T R_b^{-1}(U-Se)}{2\sigma_b^2}\right) - \left(\frac{(e-e_0)^T R_E^{-1}(e-e_0)}{2\sigma_E^2}\right)\right\} \tag{10.6}$$

Sachant que maximiser une exponentielle revient à minimiser l'opposé de son argument, on comprend que l'estimateur MAP devient :

$$E_{MAP} = \operatorname{ArgMin}\left\{\left(\frac{(U-Se)^T R_b^{-1}(U-Se)}{2\sigma_b^2}\right) + \left(\frac{(e-e_0)^T R_E^{-1}(e-e_0)}{2\sigma_E^2}\right)\right\} \tag{10.7}$$

Sachant que la fonction à minimiser correspond à une forme quadratique, il suffit de poser que son gradient est nul. Ce processus nous permet d'obtenir la forme suivante :

$$E_{MAP} = e_0 + \left(\frac{S^T R_b^{-1} S}{\sigma_b^2} + \frac{R_E^{-1}}{\sigma_E^2}\right)^{-1} \frac{S^T R_b^{-1}}{\sigma_b^{-1}}(U - Se_0) \tag{10.8}$$

Ensuite, en manipulant les termes de l'équation précédente il est possible d'obtenir un résultat très similaire à l'équation obtenue pour le cas de la méthode de Levenberg-Marquardt modifiée :

$$E_{MAP} = e_0 + \left(S^T R_b^{-1} S + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_E^2} R_E^{-1} \right)^{-1} S^T R_b^{-1} (U - Se_0) \tag{10.9}$$

Maintenant, sachant qu'aucune information *a priori* est utilisée sur les déplacements, on pose la matrice de corrélation égale à une matrice identité et l'équation peut donc s'écrire ainsi :

$$E_{MAP} = e_0 + \left(S^T S + \lambda R_E^{-1} \right)^{-1} S^T (U - Se_0) \tag{10.10}$$

ANNEXE 2 : Le Déterminant

On veut démontrer que le déterminant de la matrice [A] est deux fois l'aire d'un triangle.

Le déterminant de la matrice [A] définie à l'équation *(4.18)* peut s'exprimer ainsi pour un cas d'élément triangulaire :

$$\det = (1)(x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_1)(y_3 - y_2) + (y_1)(x_3 - x_2) \tag{10.11}$$

Le développement de ces termes donne :

$$\det = x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_1 y_3 + x_1 y_2 + x_3 y_1 - x_2 y_1 \tag{10.12}$$

Afin de simplifier la démonstration, nous utiliserons un cas particulier où la base du triangle est parfaitement horizontale. Ceci implique donc que $y_1 = y_2$. Ainsi, le déterminant peut s'écrire :

$$\det = x_2y_3 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 \tag{10.13}$$

Dans ce cas, l'aire du triangle est :

$$\text{Aire} = \left(\frac{1}{2}\right)(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) \tag{10.14}$$

Le développement de ces termes résulte en :

$$\text{Aire} = \left(\frac{1}{2}\right)(x_2y_3 - x_2y_2 - x_1y_3 + x_1y_2) \tag{10.15}$$

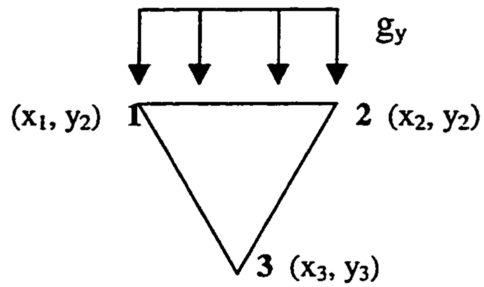
Sachant que dans le cas particulier étudié, $y_1 = y_2$, il est maintenant clair que le déterminant vaut deux fois l'aire du triangle.

ANNEXE 3 : Développement en termes matricielles de l'application des forces de surface

L'intégrale que nous devons développer sous forme matricielle est représenté par :

$$\int_{d\Omega} [N]^t \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix} \tag{10.16}$$

Les triangles dont il est question font partie de la surface supérieure de la structure et possèdent un coté parfaitement horizontale dans le référentiel général. Un triangle typique peut être représenté de la façon suivante :



Étant donné que la force est appliquée dans la direction des Y sur la surface X, donc g_x est nul, on obtient :

$$\int_{d\Omega} [N]^t \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix} = g_y \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \int N_1 dx \\ \int N_2 dx \\ \int N_3 dx \end{bmatrix} \qquad \textit{(10.17)}$$

Sachant que l'intégrale des fonctions de forme est faite sur un coté du triangle (entre x_1 et x_2), on obtiendra, à l'aide des équations *(4.22 a,b,c)*, le résultat suivant pour la fonction de forme du nœud 1 :

$$\int_{x=x_1}^{x=x_2} \frac{1}{2A} \left[(x_3 y_1 - y_3 x_1) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y \right] dx \qquad \textit{(10.18)}$$

où A représente l'aire du triangle étudié. Le développement de cette intégrale est représenté par :

$$\left(\frac{1}{2A}\right) \left[(x_3 y_1 - y_3 x_1)x + (y_3 - y_1)\frac{x^2}{2} + (x_1 - x_3)yx \Bigg|_{x_1}^{x_2} \right] \qquad \textit{(10.19)}$$

Puisque la distribution de force est appliquée sur toute la surface entre x_1 et x_2, on peut remplacer le y par y_1 ou y_2 puisque les deux ont la même valeur. Ainsi, le développement de cette équation est :

$$\int_{x_1}^{x_2} N_1 dx = \frac{(x_2 - x_1)}{2} \qquad \textit{(10.20)}$$

Si le même développement est fait pour l'intégrale des deux autres fonctions de forme, on obtient :

$$\int_{x_1}^{x_2} N_2 dx = \frac{(x_2 - x_1)}{2} \qquad \textit{(10.21)}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} N_3 dx = 0 \qquad \textit{(10.22)}$$

Ainsi, il est maintenant clair que :

$$\int_{d\Omega} [N]^t \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix} = \frac{(x_2 - x_1)}{2} g_x \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \textit{(10.23)}$$

Le résultat est donc équivalent à deux forces concentrées chacune égale à la moitié de la force résultante du chargement distribué.

ANNEXE 4 : Définition des constantes du modèle analytique

$$\beta = -\frac{2(\mu_I - \mu_M)}{\mu_M + \mu_I \kappa_M} \qquad (10.24)$$

$$\gamma = \frac{\mu_M(\kappa_I - 1) - \mu_I(\kappa_M - 1)}{2\mu_I + \mu_M(\kappa_I - 1)} \qquad (10.25)$$

$$\delta = \frac{\mu_I - \mu_M}{\mu_M + \mu_I \kappa_M} \qquad (10.26)$$

$$\beta_0 = \frac{\mu_I(\kappa_M + 1)}{2\mu_I + \mu_M(\kappa_I - 1)} \qquad (10.27)$$

$$\delta_0 = \frac{\mu_I(\kappa_M + 1)}{\mu_M + \mu_I \kappa_M} \qquad (10.28)$$

$$\gamma_0 = 0 \qquad (10.29)$$

On suppose que l'inclusion et l'arrière-plan ont le même coefficient de Poisson donc en état plan de déformation :

$$\kappa_M = \kappa_I = 3 - 4\nu \qquad (10.30)$$